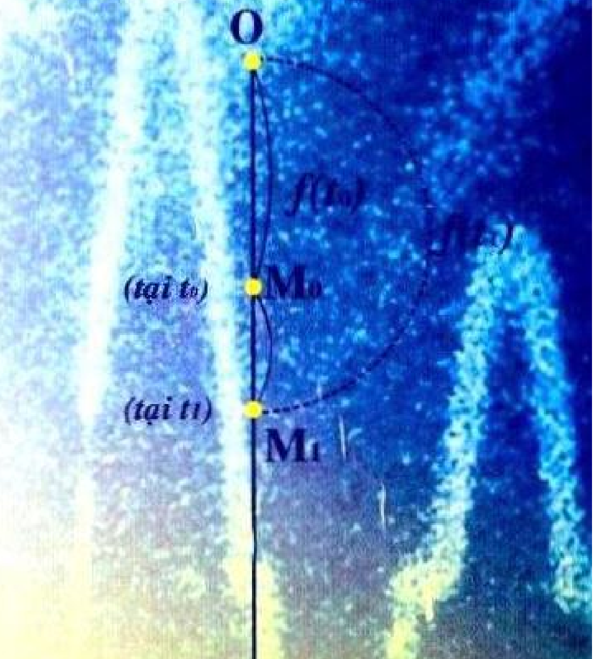
PGS. TS NGUYỄN VĂN LỘC (Chủ biên)
TRẦN QUANG TÀI - MAI XUÂN ĐÔNG - LÊ NGỌC HẢI - TRỊNH MINH LÂM

HƯỚNG DẪN

GIẢI BÀI TẬP
ĐẠI SỐ & GIẢI TÍCH 11

(CHƯƠNG TRÌNH CHUẨN)

(Tái bản lần thứ hai)


O
f(t₀)
f(t₁)
(tại t₀)
M₀
(tại t₁)
M₁
y

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PGS. TS NGUYỄN VĂN LỘC (Chủ biên)
TRẦN QUANG TÀI – MAI XUÂN ĐÔNG – LÊ NGỌC HẢI – TRỊNH MINH LÂM

Hướng dẫn

GIẢI BÀI TẬP
ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

11

(Tái bản lần thứ hai)

- Tóm tắt lý thuyết
- Bài tập căn bản
- Câu hỏi trắc nghiệm

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

GIẢI BÀI TẬP ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11
(Chương trình chuẩn)
Nguyễn Văn Lộc (Chủ biên)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 39714896: (04) 39724770; Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Chịu trách nhiệm nội dung
Biên tập: TRẦN VĂN HÙNG
Trình bày bìa: QUỐC VIỆT

Đối tác liên kết xuất bản:

CÔNG TY SÁCH – THIẾT BỊ GIÁO DỤC ĐỨC TRÍ

Mã số 1L-128 ĐH2009
In 3.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại Công ty In Hưng Phú
Số xuất bản: 345-2009/CXB/45-54/ĐHQGHN, ngày 24/4/2009
Quyết định xuất bản số: 128 LK-TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2009.

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách **"Hướng dẫn giải bài tập Đại số & Giải tích"** ban Cơ sở có nội dung tương ứng với sách giáo khoa Đại số và giải tích 11 ban Cơ sở áp dụng từ năm 2007 – 2008.

Mỗi mục (§) của chương gồm bốn phần.

I. Tóm tắt lý thuyết.

II. Bài tập căn bản.

III. Câu hỏi trắc nghiệm.

IV. Đáp án.

Phần I: Trình bày những vấn đề lý thuyết trọng tâm nhất của sách giáo khoa mà các em cần phải hiểu và nắm vững.

Phần II: Trình bày lời giải chi tiết của các bài tập có trong sách giáo khoa, mỗi bài tập đều nêu đầy đủ các bước lập luận với căn cứ là các định nghĩa, định lý, các tính chất đã học.

Phần III: Trình bày các câu hỏi trắc nghiệm nhằm giúp các em ôn luyện lại kiến thức đã học.

Phần IV: Trình bày đáp án câu hỏi trắc nghiệm có ở phần III.

Việc sử dụng sách nên thực hiện theo trình tự như sau:

Sau khi học lý thuyết, các em hãy tự mình giải các bài tập có trong sách giáo khoa, nếu gặp khó khăn có thể tham khảo lời giải bài tập trình bày ở phần II, hơn nữa ngay cả khi giải được bài tập trong sách giáo khoa, các em cũng nên so sánh lời giải của mình với lời giải được trình bày trong sách này để hiểu sâu sắc hơn, đầy đủ kiến thức và phương pháp giải toán. Tiếp theo các em nên dành thời gian giải các câu hỏi trắc nghiệm ở phần III để củng cố kiến thức.

Hy vọng cuốn sách sẽ là tài liệu hỗ trợ tích cực giúp các em học tốt Đại số và giải tích 11.

Rất mong các em dùng sách với ý thức tự chủ cao và không dùng sách theo cách chỉ "đọc" các lời giải có sẵn của các bài tập trong sách giáo khoa.

Các tác giả

CHƯƠNG I: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I. Tóm tắt lý thuyết:

1. Hàm số sin và hàm số côsin:

- Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực sinx được gọi là hàm số sin, kí hiệu là y = sinx.

$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto y = \sin x.$

- Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực cosx được gọi là hàm số côsin, kí hiệu là: y = cosx.

$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto y = \cos x.$

2. Hàm số tang và hàm số côtang:

- Hàm số tang là hàm số được xác định bởi công thức:

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \ (\cos x \neq 0)$$

kí hiệu là y = tanx.

- Hàm số côtang là hàm số được xác định bởi công thức:

$$y = \frac{\cos x}{\sin x} \ (\sin x \neq 0)$$

kí hiệu là y = cotx.

3. Tính tuần hoàn của hàm số lượng giác:

- Hàm số y=sinx và hàm số y = cosx là các hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π.
- Hàm số y=tanx và hàm số y = cotx là các hàm số tuần hoàn với chu kỳ π.

4. Sự biến thiên và đồ thị của hàm số lượng giác:

- Hàm số y = sinx.

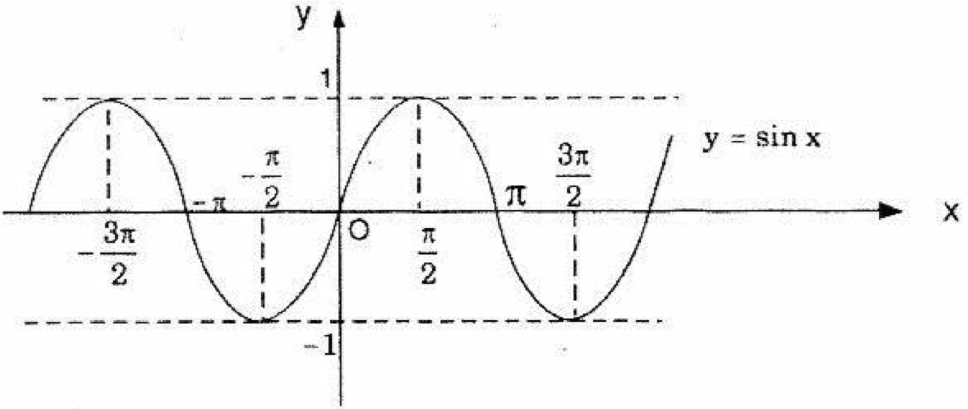
  + Tập xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $-1 \leq \sin x \leq 1$.

  + Là hàm số lẻ.

  + Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π.

+ Hàm số đồng biến trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, nghịch biến trên $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.

+ Đồ thị là đường sin dạng:



- Hàm số y = cosx.

  + Tập xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $-1 \le \cos x \le 1$.

  + Là hàm số chẵn.

  + Là hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π.

  + Do $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$, nên đồ thị hàm số y = cosx là đồ thị hàm số

  y = sinx tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = \left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$.

- Hàm số y = tanx.

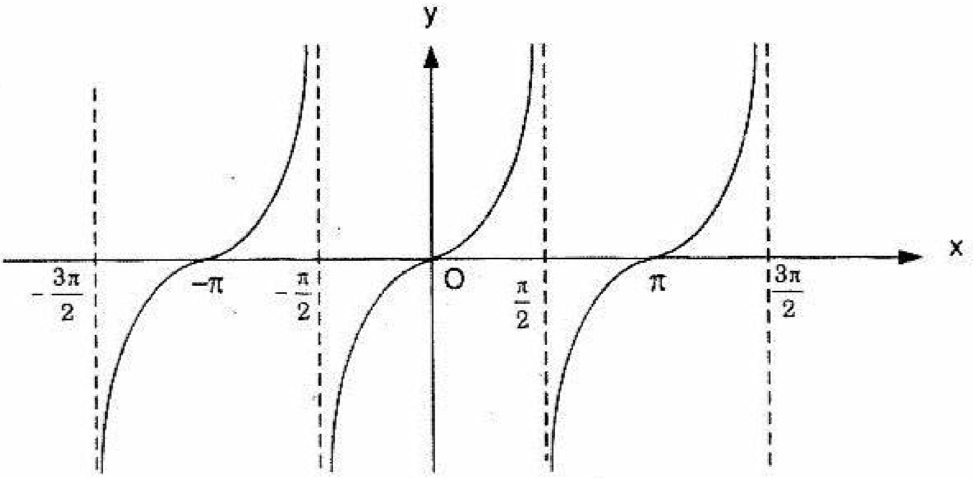
  + Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

  + Là hàm số lẻ.

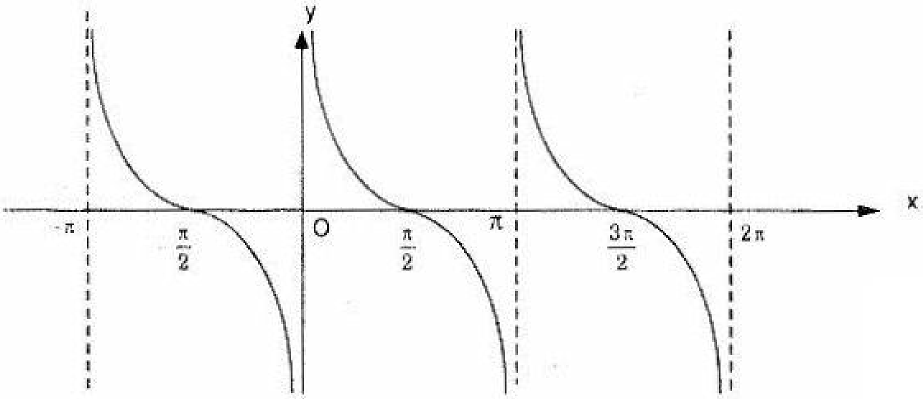
  + Là hàm tuần hoàn với chu kỳ π.

  + Hàm số đồng biến trên $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

  + Đồ thị có dạng:



- Hàm số y = cotx.
  - Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
  - Là hàm số lẻ.
  - Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π.
  - Là hàm số nghịch biến trên $(0; \pi)$.
  - Đồ thị có dạng:



II. Bài tập căn bản

Bài 1: Hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ để hàm số y = tanx:

a) Nhận giá trị bằng 0 ; b) Nhận giá trị bằng 1 ;

c) Nhận giá trị dương ; d) Nhận giá trị âm .

Giải

Dựa vào đồ thị hàm số y = tanx trên $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ đã vẽ, ta có:

a) $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = -\pi$; $x = 0$; $x = \pi$.

b) $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4}$; $x = \frac{\pi}{4}$; $x = \frac{5\pi}{4}$.

c) $\tan x > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

d) $\tan x < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Bài 2: Tìm tập xác định của hàm số:

a) $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$; b) $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$;

c) $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; d) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Giải

a) Hàm số xác định khi $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

b) Hàm số xác định khi $\begin{cases} \dfrac{1+\cos x}{1-\cos x} \geq 0 \\ 1-\cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \quad \Leftrightarrow x \neq k2\pi$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

c) Hàm số xác định khi $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0 \quad \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{3} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow x \neq \dfrac{5\pi}{6} + k\pi$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$..

d) Hàm số xác định khi $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{6} \neq k\pi \quad \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Bài 3: Dựa vào đồ thị hàm số y = sinx, hãy vẽ đồ thị của hàm số $y = |\sin x|$.

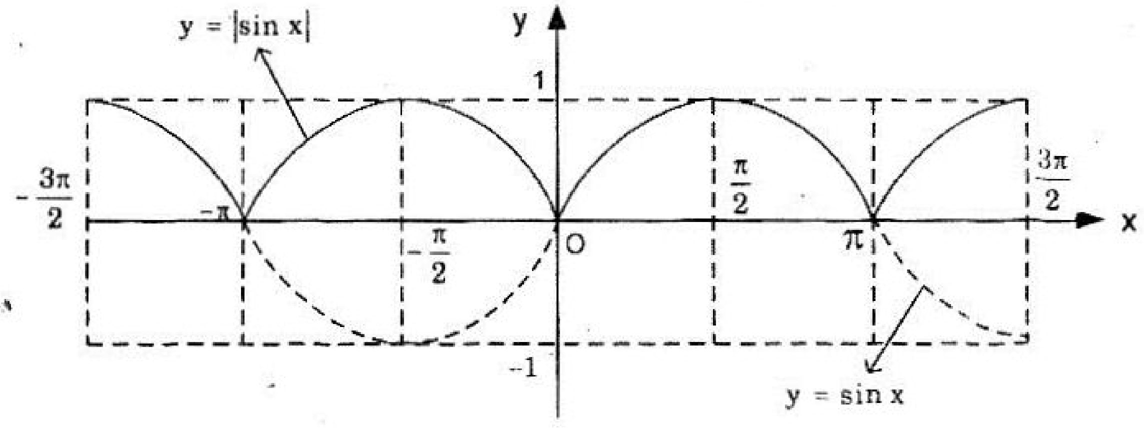
Giải

Ta có $y = |\sin x| = \begin{cases} \sin x & \text{khi } \sin x \geq 0 \\ -\sin x & \text{khi } \sin x < 0 \end{cases}$

Lại có $|\sin(-x)| = |\sin x|$, nên hàm số $y = |\sin x|$ là hàm số chẵn.

$\Rightarrow$ đồ thị đối xứng nhau qua trục Oy.

Do vậy đồ thị của hàm số $y = |\sin x|$ là hợp của hai phần đồ thị (C_1) và (C_2) trong đó (C_1) là đồ thị hàm số y = sinx với sinx $\geq$ 0 và (C_2) là đối xứng của (C_1) qua Oy. Do đó đồ thị hàm số $y = |\sin x|$ là:



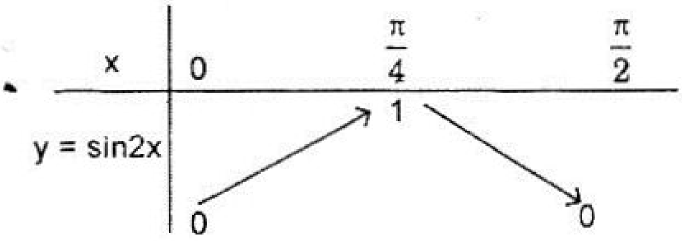
Bài 4: Chứng minh rằng $\sin 2(x + k\pi) = \sin 2x$ với mọi số nguyên k. Từ đó hãy vẽ đồ thị hàm số y = sin2x.

Hướng dẫn giải

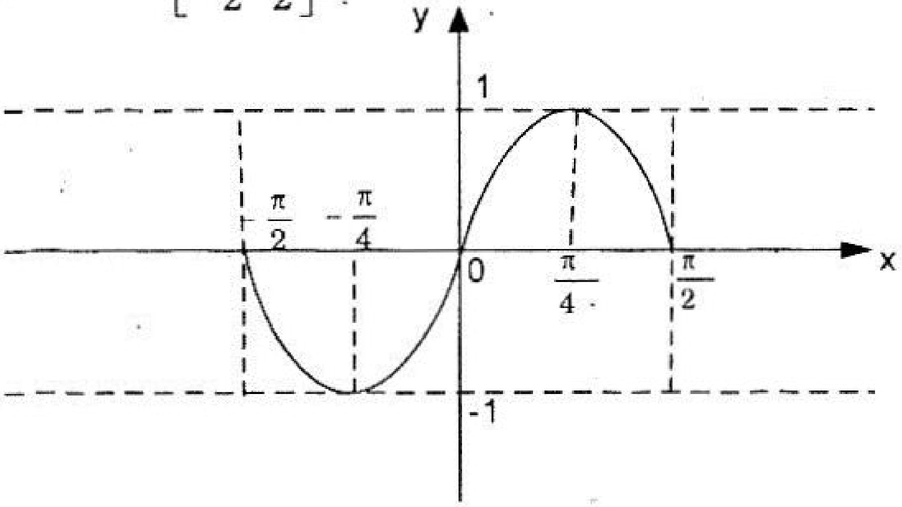
* Ta có $\sin 2(x + k\pi) = \sin(2x + k2\pi) = \sin 2x$ (vì 2x và 2x + k2π là 2 góc (cung) hơn kém nhau k2π).

* Ta chứng minh y = sin2x là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π và là hàm số lẻ.

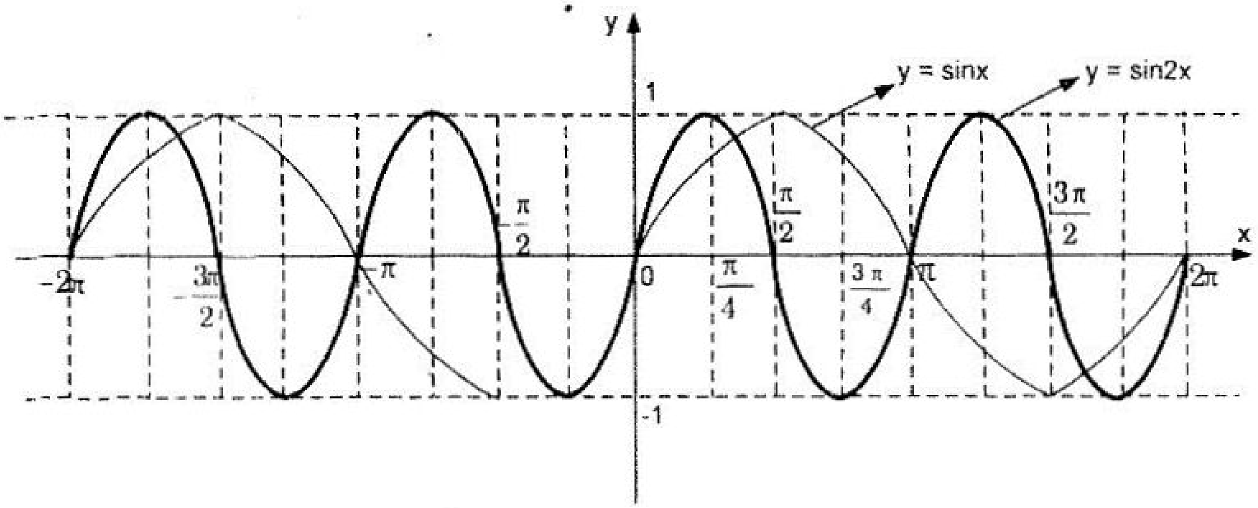
* Xét y = sin2x trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ta có bảng biến thiên:


x
0
π/4
π/2
y = sin2x
1
0
0

suy ra trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, y = sin2x có đồ thị dạng:



Do vậy đồ thị y = sin2x có dạng:



Bài 5: Dựa vào đồ thị hàm số y = cosx, tìm các giá trị của x để $\cos x = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

* Vẽ đồ thị hàm số y = cosx và đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.

* Để $\cos x = \frac{1}{2}$ thì đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ cắt đồ thị y = cosx. Dựa vào đồ thị, suy ra $\cos x = \frac{1}{2}$ khi: $x \in \left\{...; -\frac{7\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; ...\right\}$ hay

$x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 6: Dựa vào đồ thị hàm số y = sinx, tìm các khoảng giá trị của x để hàm số đó nhận giá trị dương.

Hướng dẫn giải

* Vẽ đồ thị hàm số y = sinx.

* Dựa vào đồ thị, suy ra y = sinx nhận giá trị dương khi:

$x \in \{...; (-2\pi; -\pi); (0; \pi); (2\pi; 3\pi); ...\}$ hay $x \in (k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Bài 7: Dựa vào đồ thị hàm số y = cosx, tìm các khoảng giá trị của x để hàm số đó nhận giá trị âm.

Hướng dẫn giải

* Vẽ đồ thị hàm số y = cosx.

* Dựa vào đồ thị hàm số, suy ra y = cosx nhận giá trị âm khi:

$$x \in \left\{...\left(-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right); \left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{3\pi}{2}\right); \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right); \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)...\right\}$$

hay $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Bài 8: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

a) $y = 2\sqrt{\cos x} + 1$; b) y = 3 – 2sinx.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\cos x \le 1 \ \forall x$.

$\Rightarrow 2\sqrt{\cos x} + 1 \le 2.\sqrt{1} + 1 = 3$.

$\Rightarrow$ max y = 3 khi cosx = 1 hay khi x = kπ.

b) Ta có $\sin x \geq -1\ \forall x \Rightarrow 3 - 2\sin x \leq 3 + 2.1 = 5$.

Vậy max $y = 5$ khi $\sin x = -1$ hay $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Các giá trị của x trên đoạn $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ để hàm số $y = \cot x$ nhận giá trị bằng -1 là:

(A) $x = -\frac{\pi}{4}$; (B) $x = -\frac{3\pi}{4}$; $x = \frac{\pi}{4}$;

(C) $x = \frac{\pi}{4}$; $x = \frac{3\pi}{4}$; (D) $x = -\frac{\pi}{4}$; $x = \frac{3\pi}{4}$.

2. Tập xác định của hàm số $y = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$ là:

(A) $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; (B) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

(C) $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; (D) $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) Hàm số $y = \frac{1}{\tan x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

(B) Hàm số $y = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{\sin x + 2}}$ có tập xác định là D = R;

(C) Hàm số $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

(D) Hàm số $y = \frac{1}{\cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2007\sin x + 2008$ là:

(A) -1 ; (B) 1 ; (C) 2 ; (D) -2

5. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{\cos x} + 11$ là:

(A) 12 ; (B) 13 ; (C) 11 ; (D) 10

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(D)	(B)	(C)	(B)	(C)

§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Phương trình sinx = a (1)

- Cách giải: + Nếu $|a| > 1$, phương trình (1) vô nghiệm.

  + Nếu $|a| \le 1$, phương trình có các nghiệm:

  $\left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right.$,k ∈ ℤ, trong sinα = a.

- Lưu ý: + Phương trình sinx = $\sin\alpha$ có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

  + Nếu $\alpha \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \\ \sin\alpha = a \end{cases}$, khi đó nghiệm của (1) được viết là: $\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

  + Phương trình sinx=sin β^0 có nghiệm

  $\left[\begin{array}{l} x = \beta^0 + k360^0 \\ x = 180^0 - \beta^0 + k360^0, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

2. Phương trình cosx = a (2)

- Cách giải: + Nếu $|a| > 1$, phương trình (2) vô nghiệm.

  + Nếu $|a| \le 1$, phương trình có các nghiệm:

  $x = \pm\alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\cos\alpha = a$.

- Lưu ý: + Phương trình cosx = $\cos a$ có nghiệm $x = \pm\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

  + Nếu $\alpha \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases} 0 \le \alpha \le \pi \\ \cos\alpha = a \end{cases}$, khi đó nghiệm của (2) được viết là: $x = \pm\arccos a + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

  + Phương trình cosx = $\cos\beta^0$ có nghiệm: $x = \pm\beta^0 + k360^0, k \in \mathbb{Z}$.

3. Phương trình tanx = a (3)

- Cách giải: Điều kiện của phương trình: $x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Khi đó phương trình có nghiệm: $x = \arctan a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- Lưu ý: + Phương trình tanx = $\tan\alpha$ có nghiệm $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

  + Phương trình tanx = $\tan\beta^0$ có nghiệm $x = \beta^0 + k180^0, k \in \mathbb{Z}$.

4. Phương trình cotx = a (4)

- Cách giải: Điều kiện của phương trình: $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Khi đó phương trình có nghiệm: $x = arc\cot a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- Lưu ý: + Phương trình cotx = $\cot\alpha$ có nghiệm x = $\alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

  + Phương trình cotx = $\cot\beta^0$ có nghiệm $x = \beta^0 + k180^0, k \in \mathbb{Z}$.

II. Bài tập căn bản

Bài 1: Giải các phương trình:

a) $\sin(x + 2) = \frac{1}{3}$; (b) sin3x = 1 ;

(c) $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$; (d) $\sin(2x + 20^0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Giải

a) $$\sin(x+2) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2 = \arcsin\frac{1}{3} + k2\pi \\ x + 2 = \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 + \arcsin\frac{1}{3} + k2\pi \\ x = -2 + \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

b) $\sin 3x = 1 \Leftrightarrow \sin 3x = \sin\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}$.

c) $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d) $\sin(2x + 20^0) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(2x + 20^0) = \sin(-60^0)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 20^0 = -60^0 + k360^0 \\ 2x + 20^0 = 180^0 + 60^0 + k360^0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -40^0 + k180^0 \\ x = 110^0 + k180^0, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Bài 2: Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số y = sin3x và y = sinx bằng nhau?

Giải

Giá trị của các hàm số y = sin3x và y = sinx bằng nhau khi và chỉ khi

$$\sin 3x = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = x + k2\pi \\ 3x = \pi - x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Vậy với $x = k\pi$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ thì giá trị của hàm số y= sin3x và y= sinx bằng nhau.

Bài 3: Giải các phương trình:

a) $\cos(x-1) = \frac{2}{3}$; (b) $\cos 3x = \cos 12^0$;

c) $\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$; d) $\cos^2 2x = \frac{1}{4}$.

Giải

a) $\cos(x-1) = \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow x - 1 = \pm\arccos\frac{2}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = 1 \pm \arccos\frac{2}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) $\cos 3x = \cos 12^0 \Leftrightarrow 3x = \pm 12^0 + k360^0 \Leftrightarrow x = \pm 4^0 + k120^0, k \in \mathbb{Z}.$

c) $\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{11\pi}{18} + \frac{k4\pi}{3} \\ x = -\frac{5\pi}{18} + \frac{k4\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

d) $\cos^2 2x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos 2x = \pm\frac{1}{2}$

- $\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \notin \mathbb{Z}.$
- $\cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

.

Bài 4: Giải phương trình: $\frac{2\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0$.

Giải

Điều kiện $1 - \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 1$. Khi đó:

$$\frac{2\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin 2x = 1 & \text{(loại)} \\ \sin 2x = -1 & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Bài 5: Giải các phương trình:

a) $\tan(x - 15^0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$; (b) $\cot(3x - 1) = -\sqrt{3}$;

c) $\cos 2x.\tan x = 0$; (d) $\sin 3x.\cot x = 0$.

Giải

a) Điều kiện $x - 15^0 \neq 90^0 + k180^0$ hay $x \neq 105^0 + k180^0$.

Khi đó $\tan(x - 15^0) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan(x - 15^0) = \tan 30^0$

$\Leftrightarrow x - 15^0 = 30^0 + k180^0 \Leftrightarrow x = 45^0 + k180^0, k \in \mathbb{Z}$.

Kết hợp với điều kiện, suy ra phương trình có nghiệm $x = 45^0 + k180^0$.

b) Điều kiện $3x - 1 \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{3} + \frac{k\pi}{3}$

Khi đó $\cot(3x - 1) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot(3x - 1) = \cot(\frac{5\pi}{6}) \Leftrightarrow 3x - 1 = \frac{5\pi}{6} + k\pi$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} + \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp với điều kiện, suy ra phương trình có nghiệm: $x = \frac{1}{3} + \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) Điều kiện phương trình $\cos x \neq 0$. Khi đó

$$\cos 2x.\tan x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \tan x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ x = k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\\ x = k\pi\end{array}\right..$$

Kết hợp với điều kiện, suy ra phương trình có nghiệm:

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) Điều kiện phương trình $\sin x \neq 0$. Khi đó

$$\sin 3x.\cot x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3x = 0\\ \cot x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x = k\pi\\ 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{k\pi}{3}\\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\end{array}\right..$$

Kết hợp với điều kiện, suy ra phương trình có nghiệm: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$,

$x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$..

Bài 6: Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số:

$y = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ và y = tan2x bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Giá trị của các hàm số: $y = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ và y = tan2x bằng nhau khi:

$$\tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} - x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 7: Giải các phương trình sau:

a) sin3x – cos5x = 0 ; b) tan3x.tanx = 1.

Giải

a) $\sin 3x - \cos 5x = 0 \Leftrightarrow \cos 5x = \sin 3x \Leftrightarrow \cos 5x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = \frac{\pi}{2} - 3x + k2\pi \\ 5x = -\frac{\pi}{2} + 3x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$$

b) $\tan 3x.\tan x = 1 \Leftrightarrow \tan 3x = \cot x \Leftrightarrow \tan 3x = tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

III. Câu hỏi trắc nghiệm: Chọn đáp án đúng trong các câu hỏi sau:

1. Giá trị $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ là nghiệm của phương trình:

(A) cosx = 0 ; (B) sinx = 0 ; (C) $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$; (D) $\cos(x + 45^0) = 1$.

2. Phương trình sin4x = $\frac{1}{2}$ có số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ là:

(A) 2 ; (B) 4 ; (C) 6 ; (D) 8.

3. Phương trình tan2x = $\sqrt{3}$ có số nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$ là:

(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) 4 .

4. Giá trị của hàm số y = sin2x và y = sinx bằng nhau khi:

(A) $x = \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$; (B) $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right.$;

(C) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$; (D) $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

5. Phương trình $\cos(\pi.\sin x) = 1$ có tập nghiệm là:

(A) $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; (B) $x = k2\pi$;

(C) $x = \pi + k2\pi$; (D) $x = k\pi$.

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(A)	(B)	(C)	(B)	(D)

§3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác: là phương trình có dạng at + b = 0, trong đó a, b là các hằng số, $a \neq 0$ và t là một trong các biểu thức sinx, cosx, tanx, cotx.

Cách giải: Chuyển vế rồi chia hai vế cho a, ta đưa về phương trình lượng giác cơ bản.

2. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác: là phương trình có dạng $at^2 + bt + c = 0$, trong đó a, b, c là các hằng số, $(a \neq 0)$ và t là một trong các biểu thức sinx, cosx, tanx, cotx.

Cách giải: Đặt biểu thức lượng giác làm ẩn phụ và đặt điều kiện cho ẩn phụ (nếu có) rồi giải phương trình theo ẩn phụ. Cuối cùng ta đưa về việc giải các phương trình lượng giác cơ bản.

3. Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx: là phương trình dạng asinx + bcosx = c, trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a^2 + b^2 \neq 0$.

Cách giải:

$$a\sin x + b\cos x = c \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Do $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, nên đặt $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Khi đó phương trình trở thành:

$\cos\alpha.\sin x + \sin\alpha.\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Đây là phương trình lượng giác cơ bản.

Lưu ý: Điều kiện cần và đủ để phương trình asinx + bcosx = c có nghiệm là $a^2 + b^2 \geq c^2$.

II. Bài tập căn bản:

Bài 1: Giải phương trình $\sin^2x - \sin x = 0$.

Giải

$$\sin^2x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x - 1 = 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\end{array}\right..$$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a) $2\cos^2x - 3\cos x + 1 = 0$;

b) $2\sin 2x + \sqrt{2}\sin 4x = 0$.

Giải

a) Đặt t = cosx, điều kiện $-1 \leq t \leq 1$. Khi đó phương trình trở thành:

$2t^2 - 3t + 1 = 0$ (1)

(1) có hai nghiệm $t = 1$; $t = \frac{1}{2}$.

* Với $t = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

* Với $t = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có nghiệm: $x = k2\pi$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$.

b) $2\sin 2x + \sqrt{2}\sin 4x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x + 2\sqrt{2}\sin 2x.\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x(1 + \sqrt{2}\cos 2x) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0\\ 1 + \sqrt{2}\cos 2x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0\\ \cos 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$$

Ta có:

* $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k}{2}\pi$

* $\cos 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{3\pi}{8} + k\pi$.

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \frac{1}{2}k\pi$; $x = \pm\frac{3\pi}{8} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a) $\sin^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} + 2 = 0$; b) $8\cos^2 x + 2\sin x - 7 = 0$;

c) $2\tan^2 x + 3\tan x + 1 = 0$; d) $\tan x - 2\cot x + 1 = 0$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\sin^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2} - 3 = 0$.

Đặt $t = \cos\frac{x}{2}$, ($|t| \le 1$), suy ra $t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Với $t = 1 \Rightarrow \cos\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = k4\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có $8\cos^2 x + 2\sin x - 7 = 0 \Leftrightarrow 8\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0$

Đặt $t = \sin x$, điều kiện $|t| \le 1$, suy ra: $8t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{8} \\ t = -\frac{1}{8} \end{array}\right.$.

* Với $t = \frac{3}{8} \Rightarrow \sin x = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\frac{3}{8} + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\frac{3}{8} + k2\pi \end{array}\right.$

* Với $t = -\frac{1}{8} \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\left(-\frac{1}{8}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{8}\right) + k2\pi \end{array}\right.$

c) Đặt $t = \tan x \Rightarrow 2t^2 + 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

* Với $t = -1 \Rightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

* Với $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tan x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi$.

d) $\tan x - 2\cot x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x + \tan x - 2 = 0$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right.$.

* Với $t = 1 \Rightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

* Với $t = -2 \Rightarrow \tan x = -2 \Leftrightarrow x = \arctan(-2) + k\pi$.

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a) $2\sin^2 x + \sin x.\cos x - 3\cos^2 x = 0$;

b) $3\sin^2 x - 4\sin x.\cos x + 5\cos^2 x = 2$;

c) $\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$;

d) $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x - 4\sin^2 x = -4$.

Hướng dẫn giải

a) Ta nhận thấy cosx = 0 không là nghiệm của phương trình. Chia hai vế cho $\cos^2 x$ ta được:

$2\tan^2 x + \tan x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -\frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi \end{array}\right.$ là nghiệm.

b) Ta nhận thấy cosx = 0 không là nghiệm của phương trình: $3\sin^2 x - 4\sin x.\cos x + 5\cos^2 x = 2$, nên chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được: $3\tan^2 x - 4\tan x + 5 = 2(1 + \tan^2 x)$

$\Leftrightarrow \tan^2 x - 4\tan x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan 3 + k\pi \end{array}\right.$ là nghiệm.

c) $\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$. Nhận thấy cosx= 0 không là nghiệm của phương trình. Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$, ta được

$\tan^2 x + 2\tan x - 2 = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow \tan^2 x + 4\tan x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-5) + k\pi \end{array}\right.$ là nghiệm.

d) $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x - 4\sin^2 x = -4$.

Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, khi đó phương trình trở thành

$-4\sin^2 x = -4 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1$ luôn đúng.

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ là nghiệm.

Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế cho $\cos^2 x$, ta được:

$2 - 6\sqrt{3}\tan x - 4\tan^2 x = -4(1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow 6\sqrt{3}\tan x = 6$

$\Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Bài 5: Giải các phương trình sau:

a) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$; b) $3\sin 3x - 4\cos 3x = 5$;

c) $2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0$; d) $5\cos 2x + 12\sin 2x - 13 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{6}.\cos x - \cos\frac{\pi}{6}.\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sin\frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{6} - x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ \frac{\pi}{6} - x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + l2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{12} + l2\pi \end{array}\right., l \in \mathbb{Z}.$$

b) $3\sin 3x - 4\cos 3x = 5 \Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin 3x - \frac{4}{5}\cos 3x = 1$.

Đặt $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, suy ra

$\sin(3x - \alpha) = 1 \Leftrightarrow 3x - \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{3} + \frac{k2\pi}{3}$ là nghiệm

(với $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$).

c) $2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z}.$$

d) $5\cos 2x + 12\sin 2x - 13 = 0$

$\Leftrightarrow 12\sin 2x + 5\cos 2x = 13$

$\Leftrightarrow \frac{12}{13}\sin 2x + \frac{5}{13}\cos 2x = 1$

$\Leftrightarrow \sin(2x + \alpha) = 1 \quad \left(\sin\alpha = \frac{5}{13}, \cos\alpha = \frac{12}{13}\right)$

$\Leftrightarrow 2x + \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} + k\pi.$

Bài 6: Giải các phương trình sau:

a) $\tan(2x + 1) . \tan(3x - 1) = 1$; b) $\tan x + \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1.$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $\begin{cases} \cos(2x + 1) \neq 0 \\ \cos(3x - 1) \neq 0 \end{cases}$. Khi đó

$\tan(2x + 1) . \tan(3x - 1) = 1$

$$\Leftrightarrow \cos\left[(3x-1)+(2x+1)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 5x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}$$

Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow x = \frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm.

b) Điều kiện $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \cos(x+\frac{\pi}{4}) \neq 0\end{cases}$. Khi đó

$$\tan x + \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos x.\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left[\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{10} \quad \left(\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}};\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{4}-\alpha=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}+k2\pi\\ 2x+\frac{\pi}{4}-\alpha=\pi-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}+k2\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}+k\pi\\ x=\frac{\alpha}{2}+\frac{3\pi}{8}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}+k\pi, k\notin\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin^2x+3\sin x=1+\cos^2x$ là:

(A) $\frac{5\pi}{6}$; (B) $\frac{2\pi}{3}$; (C) $\frac{\pi}{3}$; (D) $\frac{\pi}{6}$.

2. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $1+\sin^2x-\cos x=\cos^2x+2\cos x$ là:

(A) $-\frac{\pi}{4}$; (B) $-\frac{5\pi}{6}$; (C) $-\frac{\pi}{3}$; (D) $-\frac{\pi}{6}$.

3. Phương trình $\cos^2x - 3\cos x + 2 = 0$ có số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ là:

(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) 4 .

4. Phương trình $m\cos2x + \sin2x = m - 2$ có nghiệm khi:

(A) $m \geq \frac{4}{3}$; (B) $m \leq \frac{4}{3}$;

(C) $m \geq \frac{3}{4}$; (D) $m \leq \frac{3}{4}$.

5. Cho biểu thức $A = 3\sin x + 4\cos x$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) Max A = 5 khi $3\sin x + 4\cos x = 5$;

(B) Phương trình A = m có nghiệm khi $\left[\begin{array}{l} m \geq 5 \\ m \leq -5 \end{array}\right.$;

(C) $\min_{\mathbb{R}} A = -5$;

(D) $-5 \leq A \leq 5, \forall x \in \mathbb{R}$.

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(D)	(C)	(A)	(C)	(B)

ÔN TẬP CHƯƠNG I

I. Câu hỏi và bài tập tự luận

Bài 1: a) Hàm số $y = \cos3x$ có phải là hàm số chẵn không? Tại sao ?

b) Hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$ có phải là hàm số lẻ không? Tại sao?

Trả lời

a) Hàm số $y = \cos3x$ là hàm số chẵn. Thật vậy:

Tập xác định của hàm số: D = R.

$+ \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$.

$+ \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y(-x) = \cos(-3x) = \cos3x = y(x)$

$\Rightarrow$ hàm số $y = \cos3x$ là hàm số chẵn.

b) Hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$ không phải là hàm số lẻ. Thật vậy:

Với $x = \frac{\pi}{5} \Rightarrow f(-x) = \tan\left(-\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{5}\right) = \tan 0 = 0 \neq -f(x) = -\tan\frac{2\pi}{5}$.

$\Rightarrow$ Hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$ không phải là hàm số lẻ.

Bài 2: Căn cứ vào đồ thị hàm số y = sinx, tìm những giá trị của x trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ để cho hàm số đó:

a) Nhận giá trị bằng -1 ; b) Nhận giá trị âm .

Trả lời

Căn cứ vào đồ thị hàm số y = sinx, trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$, ta có:

a) $\sin x = -1$ khi $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{3\pi}{2}$.

b) $\sin x < 0$ khi $x \in (-\pi; 0) \cup (\pi; 2\pi)$.

Bài 3: Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số:

a) $y = \sqrt{2(1 + \cos x)} + 1$; b) $y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2$.

Giải

a) Ta có $-1 \le \cos x \le 1 \quad \forall x \in R$.

$\Rightarrow 2(1 + \cos x) \le 2(1 + 1) = 4 \Rightarrow y = \sqrt{2(1 + \cos x)} + 1 \le 3$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$.

Vậy Max x = 3 khi $x = k2\pi$.

b) Ta có $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \le 1 \Rightarrow 3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2 \le 3.1 - 2 = 1$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$.

Vậy Max y = 1 khi $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$.

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a) $\sin(x + 1) = \frac{2}{3}$; b) $\sin^2 2x = \frac{1}{2}$;

c) $\cot^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{3}$; d) $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}+12x\right)=-\sqrt{3}$.

Giải

a) $\sin(x+1)=\dfrac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x+1=\arcsin\frac{2}{3}+k2\pi\\&x+1=\pi-\arcsin\frac{2}{3}+k2\pi\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=-1+\arcsin\frac{2}{3}+k2\pi\\&x=-1+\pi-\arcsin\frac{2}{3}+k2\pi\end{aligned}\right.$$

b) $\sin^2 2x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\sin 2x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$*\ \sin 2x=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\sin 2x=\sin\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&2x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\&2x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=\frac{\pi}{8}+k\pi\\&x=\frac{3\pi}{8}+k\pi\end{aligned}\right.$$

$$*\ \sin 2x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\sin 2x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&2x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\&2x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=-\frac{\pi}{8}+k\pi\\&x=\frac{5\pi}{8}+k\pi\end{aligned}\right.$$

c) $\cot^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\cot\dfrac{x}{2}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$*\ \cot\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\cot\dfrac{x}{2}=\cot\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi.$

$*\ \cot\dfrac{x}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\cot\dfrac{x}{2}=\cot\dfrac{2\pi}{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{4\pi}{3}+k2\pi.$

d) $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}+12x\right)=-\sqrt{3}$

$\tan\left(12x+\dfrac{\pi}{12}\right)=\tan\dfrac{2\pi}{3}\Leftrightarrow 12x+\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{2\pi}{3}+k\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{7\pi}{144}+\dfrac{k\pi}{12}.$

Bài 5: Giải các phương trình sau:

a) $2\cos^2x-3\cos x+1=0$; b) $25\sin^2x+15\sin 2x+9\cos^2x=15$;

c) $2\sin x+\cos x=1$; d) $\sin x+1{,}5\cot x=0$

Giải

a) $2\cos^2x-3\cos x+1=0$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

* Với $t = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$.

* Với $t = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$.

b) $25\sin^2 x + 15\sin 2x + 9\cos^2 x = 15$ (2)

Nhận thấy $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ là nghiệm của phương trình vì $25\sin^2 x = 25 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1$ luôn đúng.

Với $\cos x \neq 0$. Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow 25\tan^2 x + 30\tan x + 9 = 25(1 + \tan^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 30\tan x = 16$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \frac{8}{15} \Leftrightarrow x = \arctan\frac{8}{15} + k\pi.$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \arctan\frac{8}{15} + k\pi$.

c) $2\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Đặt $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Suy ra $\sin(x + \alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \pi - 2\alpha + k2\pi. \end{array}\right.$

d) $\sin x + 1,5\cot x = 0$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + \frac{3}{2}\cos x = 0 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x + \frac{3}{2}\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x = 2 & \text{(loại)} \\ \cos x = -\frac{1}{2} & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi.$$

II. Bài tập trắc nghiệm

Chọn phương án đúng trong các bài tập sau:

Bài 6: Phương trình cosx = sinx có các số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$ là:

(A) 2 ; (B) 4 ; (C) 5 ; (D) 6

Giải

Ta có $\cos x = \sin x \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$

mà $x \in [-\pi;\pi] \Rightarrow -\pi \le \frac{\pi}{4} + k\pi \le \pi \Leftrightarrow -\frac{5}{4} \le k \le \frac{3}{4}$ mà $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow k = 0; k = -1$

$\Rightarrow$ trên $[-\pi;\pi]$ phương trình có hai nghiệm.

Vậy A là đáp án cần tìm.

Bài 7: Phương trình $\frac{\cos 4x}{\cos 2x} = \tan 2x$ có số nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là:

(A) 2 ; (B) 3 ; (C) 4 ; (D) 5 .

Giải

$\frac{\cos 4x}{\cos 2x} = \tan 2x \Leftrightarrow \cos 4x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ 4x = 2x - \frac{\pi}{2} + l2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{4} + l\pi \end{array}\right.$$

$$\text{mà } x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} < \frac{\pi}{2} \\ 0 < -\frac{\pi}{4} + l\pi < \frac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{4} < k < \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} < l < \frac{3}{4} \end{array}\right.$$

mà $k, l \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0, k = 1.$

Phương trình có hai nghiệm thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Vậy (A) là đáp án cần tìm.

Bài 8: Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình

$\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x$ là:

(A) $\frac{\pi}{6}$; (B) $\frac{2\pi}{3}$; (C) $\frac{\pi}{4}$; (D) $\frac{\pi}{3}$.

Giải

$\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x$

$\Leftrightarrow (1 + 2\cos x).\sin x = \cos x.(1 + 2\cos x)$

$\Leftrightarrow (2\cos x + 1).(\sin x - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x + 1 = 0 \\ \sin x - \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$

mà x dương lớn nhất $\Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$. Vậy (C) là đáp án cần tìm.

Bài 9: Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $2\tan^2 x + 5\tan x + 3 = 0$ là:

(A) $-\dfrac{\pi}{3}$; (B) $-\dfrac{\pi}{4}$; (C) $-\dfrac{\pi}{6}$; (D) $-\dfrac{5\pi}{6}$.

Giải

Ta có $2\tan^2 x + 5\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\dfrac{3}{2}\right) + k\pi. \end{array}\right.$

mà x là âm nhỏ nhất $\Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{4}$.

Vậy (B) là đáp án cần tìm.

Bài 10: Phương trình $2\tan x - 2\cot x - 3 = 0$ có số nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$ là:

(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) 4.

Giải

Ta có $2\tan x - 2\cot x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2\tan^2 x - 3\tan x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 2 \\ \tan x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arctan 2 + k\pi \\ x = \arctan\left(-\dfrac{1}{2}\right) + k\pi \end{array}\right.$.

mà $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow$ trên $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$ phương trình có 3 nghiệm.

Vậy (C) là đáp án cần tìm.

CHƯƠNG II. TỔ HỢP – XÁC SUẤT

§1. QUY TẮC ĐẾM

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Số phần tử của một tập hữu hạn A được ký hiệu là n(A) hoặc $|A|$.

2. Quy tắc cộng:

a. Quy tắc: Một công việc được thực hiện bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất, thì công việc đó có m + n cách thực hiện.

b. Nếu A và B là hai tập hữu hạn không giao nhau, thì

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

c. Chú ý: Quy tắc cộng có thể mở rộng cho nhiều hành động.

3. Quy tắc nhân:

a. Quy tắc: Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai, thì có m.n cách hoàn thành công việc.

b. Chú ý: Quy tắc nhân có thể mở rộng cho nhiều hành động liến tiếp.

II. Bài tập căn bản

Bài 1: Từ các chữ số tự nhiên 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm:

a) Một chữ số? ; b) Hai chữ số? ; c) Hai chữ số khác nhau.

Giải

a) Hiển nhiên từ các chữ số 1, 2, 3, 4 ta có thể thành lập được 4 số tự nhiên có một chữ số, các số đó chính là các số 1, 2, 3, 4.

b) Gọi số có hai chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $\overline{ab}$.

Với a, b $\in \{1,2,3,4\}$.

Có 4 cách chọn chữ số a.

Ứng với mỗi cách chọn chữ số a có 4 cách chọn chữ số b. Do vậy, theo quy tắc nhân ta có: 4.4 =16 cách thành lập số $\overline{ab}$.

c) .Gọi số có hai chữ số đó là $\overline{ab}$; $a, b \in \{1,2,3,4\}$ và a khác b.

Có bốn cách chọn chữ số a. Ứng với mỗi cách chọn chữ số a chỉ có 3 cách chọn chữ số b (vì a $\neq$ b).

Do đó, theo quy tắc nhân có 4.3 = 12 cách thành lập số $\overline{ab}$ thỏa mãn yêu cầu.

Bài 2: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể thành lập được bao nhiêu số tự nhiên bé hơn 100.

Giải

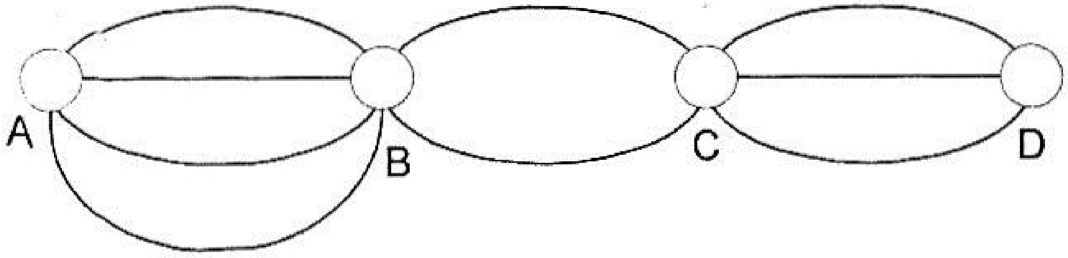
Những số tự nhiên bé hơn 100 là những số tự nhiên hoặc là có một chữ số hoặc là hai số.

Từ các chữ số đã cho chỉ có 6 cách thành lập các số tự nhiên có một chữ số đó là các số 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Gọi số có hai chữ số là $\overline{ab}$; $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Có 6 cách chọn chữ số a. Ứng với mỗi cách chọn chữ số a có 6 cách chọn chữ số b. Do vậy, theo quy tắc nhân có cả thảy 6.6 = 36 cách thành lập số thỏa mãn yêu cầu.

Do đó theo quy tắc cộng có cả thảy là: 6 + 36 = 42 số thỏa mãn yêu cầu.

Bài 3 : Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình sau:



a) Có bao nhiêu cách đi từ A đến D, qua B và C chỉ một lần?

b) Có bao nhiêu cách đi từ A đến D rồi quay lại A?

Giải

a) Để đi từ A đến D phải đi qua B và C (chỉ một lần).

Có 4 cách để đi từ A đến B (vì có 4 con đường). Ứng với mỗi cách đi từ A đến B có cách để đi từ B đến C. Ứng với mỗi cách đi từ A đến C có 3 cách để đi từ C đến D. Theo quy tắc nhân (mở rộng cho 3 hành động) có cả thảy là: 4.2.3 = 24 cách để đi từ A đến D.

b) Để đi từ A đến D rồi quay lại A có 24.24 = 576 cách.

Bài 4: Có ba kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn, elip) và bốn kiểu dây (kim loại, da, vải và nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ gồm một mặt và một dây?

Giải

Có ba cách chọn kiểu mặt. Ứng với một cách chọn kiểu mặt có bốn cách chọn kiểu dây. Theo quy tắc nhân có 3.4 = 12 cách chọn một chiếc đồng hồ.

III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 1000 và có các chữ số đều là số lẻ?

(A) 85 ; (B) 155 ; (C) 255 ; (D) 175 .

2. Có bao nhiêu số nguyên dương gồm 5 chữ số phân biệt?

(A) 27216 ; (B) 18144 ; (C) 4536 ; (D) 27316.

3. Có 18 đội bóng tham gia thi đấu. Hỏi có bao nhiêu cách trao ba huy chương vàng, bạc, đồng cho ba đội nhất, nhì, ba biết rằng mỗi đội chỉ có thể nhận nhiều nhất là một huy chương và đội nào cũng có cơ hội đoạt huy chương?

(A) 4986 ; (B) 4689 ; (C) 4896 ; (D) 6498.

4. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, trong đó các chữ số đứng cách đều số đứng giữa thì giống nhau.

(A) 800 ; (B) 900 ; (C) 1000 ; (D) 1100.

5. Có bao nhiêu số tự nhiên có sáu chữ số và chia hết cho 5?

(A) 18000 ; (B) 80000 ; (C) 160000 ; (D) 180000.

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(B)	(A)	(C)	(B)	(D)

2. HOÁN VỊ – CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa 1:

• Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n > 1$). Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

• Nhận xét: Hai hoán vị của n phần tử chỉ khác nhau ở thứ tự sắp xếp các phần tử.

• Số các hoán vị của n phần tử: ký hiệu P_n là số các hoán vị của n phần tử, ta có: $P_n = n(n-1)(n-2).....2.1$.

• Chú ý: ký hiệu $n(n-1).....2.1$ là n! (đọc là n giai thừa). Khi đó ta có: $P_n = n!$ Quy ước: $0! = 1$.

2. Định nghĩa 2:

• Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp A và sắp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho.

- Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử: ký hiệu A_n^k là số các chỉnh hợp chập k của n phần tử, ta có: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ $(1 \le k \le n)$.

- Nhận xét: $P_n = A_n^n$.

3. Định nghĩa 3:

- Giả sử tập A có n phần tử $(n \ge 1)$. Mỗi một tập con gồm k phần tử của tập hợp A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.

- Số các tổ hợp chập k của n phần tử: ký hiệu số các tổ hợp chập k của n phần tử là C_n^k $(0 \le k \le n)$. Ta có: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

- Tính chất:

a. Tính chất 1: $C_n^k = C_n^{n-k}$ $(0 \le k \le n)$.

b. Tính chất 2: $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$ $(1 \le k \le n)$.

II. Bài tập căn bản

Bài 1 : Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập các số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau. Hỏi:

a) Có tất cả bao nhiêu chữ số?

b) Có bao nhiêu số chẵn, bao nhiêu số lẻ?

c) Có bao nhiêu số bé hơn 432000?

Giải

Ta có thể coi mỗi một số có 6 chữ số được thành lập từ các chữ số đã cho là một sự sắp xếp thứ tự 6 số đó.

a) Từ đó ta có mỗi một số thỏa mãn yêu cầu bài toán chính là một hoán vị của 6 phần tử đó. Số các số có 6 chữ số thành lập các chữ số trên:

6! = 720 (số).

b) • Gọi số có 6 chữ số được thành lập từ các chữ số trên có dạng $\overline{abc}$deg và là số chẵn (các chữ số đôi một khác nhau).

Có 3 cách chọn g (có thể chọn g là 2, 4, 6), 5 cách chọn e, 4 cách chọn d, 3 cách chọn c, 2 cách chọn b, 1 cách chọn a, do đó theo quy tắc nhân có tất cả: 3.5! = 360 (số).

- Hoàn toàn tương tự số các số lẻ thỏa mãn yêu cầu là 360 số.

- Chú ý: có thể lấy tổng tất cả các số là 720 số trừ đi số các số chẵn là 360 số ta có số các số lẻ.

c) Ta cần tìm tất cả các số thỏa mãn yêu cầu, ta có thể tìm lần lượt từng số có các chữ số hàng trăm nghìn là 1, 2, 3, 4 và số đó nhỏ hơn 432000.

- Số các số có hàng trăm nghìn là 1 có dạng: $\overline{1abcde}$.

Có 5 cách chọn e, 4 cách chọn d, 3 cách chọn c, 2 cách chọn b, 1 cách chọn a, do đó có 5! = 120 số.

- Hoàn toàn tương tự các số có chữ số hàng trăm nghìn là 2 và 3 là:

120 + 120 = 240 số.

- Số có 6 chữ số có hàng trăm nghìn là 4 và nhỏ hơn 432000 có dạng:

$\overline{41abcd}$ hoặc $\overline{42abcd}$ hoặc $\overline{431abc}$.

+ Số các số có dạng $\overline{41abcd}$ là 4! = 24 số.

+ Số các số có dạng $\overline{42abcd}$ là 4! = 24 số.

+ Số các số có dạng $\overline{431abc}$ là 3! = 6 số.

Vậy có tất cả: 24 + 24 + 6 = 54 (số).

Do đó có tất cả là: 3.120 + 54 = 414 số thỏa mãn yêu cầu.

Bài 2 : Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 10 người khách vào 10 ghế kê thành một dãy?

Giải

Mỗi một cách sắp xếp 10 người khách ngồi vào ghế kê thành một dãy chính là một hoán vị của 10 phần tử. Do đó số cách sắp xếp chỗ ngồi cho 10 khách là: 10! = 3628800.

Bài 3: Giả sử có 7 bông hoa màu khác nhau và 3 cái lọ khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách cắm ba bông hoa vào ba cái lọ đã cho (mỗi lọ cắm mỗi bông hoa)?

Giải

Mỗi một cách lấy ba bông hoa trong 7 bông hoa đã cho và cắm vào 3 cái lọ chính là một chỉnh hợp chập 3 của 7 phần tử. Do đó số các cách cắm hoa là: $A_7^3 = 210$ (cách).

Bài 4: Có bao nhiêu cách mắc nối tiếp 4 bóng đèn được chọn từ 6 bóng đèn khác nhau?

Giải

Mỗi một cách mắc nối tiếp 4 bóng đèn được chọn từ 6 bóng đèn đã cho chính là một chỉnh hợp chập 4 của 6 phần tử. Do vậy số cách mắc là:

$A_6^4 = 360$ (cách).

Bài 5 : Có bao nhiêu cách cắm 3 bông hoa vào 5 cái lọ khác nhau (mỗi lọ cắm không quá một bông) nếu:

a) Các bông hoa khác nhau?

b) Các bông hoa như nhau?

Giải

a) Mỗi một cách cắm 3 bông hoa khác nhau vào 3 lọ trong 5 lọ hoa chính là một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử. Do đó số cách cắm 3 bông hoa vào 5 cái lọ (mỗi lọ cắm không quá 1 bông) là: $A_5^3 = 60$.

b) Nếu 3 bông hoa là như nhau thì mỗi cách cắm 3 bông hoa vào 5 cái lọ chỉ là một tổ hợp chập 3 của 5 phần tử. Do vậy số các cách cắm hoa trong trường hợp này là: $C_5^3 = 10$ (cách).

Bài 6 : Trong mặt phẳng cho 6 điểm phân biệt sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó thuộc tập điểm đã cho?

Giải

Vì không có 3 điểm nào thẳng hàng nên mỗi một tập gồm 3 điểm từ 6 điểm đã cho tạo thành một tam giác. Do vậy số các tam giác chính là số các tổ hợp chập 3 của 6 phần tử và bằng $C_6^3 = 20$ (tam giác).

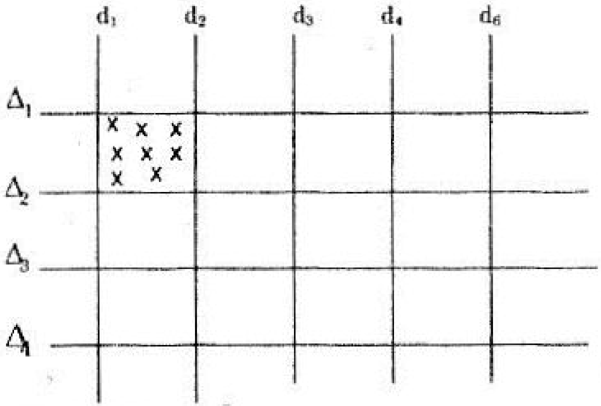
Bài 7 (SGK trang 55): Trong mặt phẳng có bao nhiêu hình chữ nhật được tạo thành từ bốn đường thẳng song song với nhau và năm đường thẳng vuông góc (đôi một phân biệt) với bốn đường thẳng song song đó?

Giải

Không giảm tổng quát, ta bố trí các đường thẳng nói trong đề bài như hình vẽ 1.

Trước hết ta tìm số hình chữ nhật được tạo thành từ cặp (d_1, d_2) và các đường $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$.

- Với cặp (d_1, d_2) và 2 đường Δ_1, Δ_2 ta có một hình chữ nhật (phần gạch chéo) $1 = C_2^2$.



Hình 1

- Với cặp (d_1, d_2) và 3 đường $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ta có 3 hình chữ nhật

  $3 = C_2^2 + 1 + 1 = C_3^2$.

- Với cặp (d_1, d_2) và 4 đường $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ ta có 6 hình chữ nhật

  $6 = C_3^2 + 1 + 1 + 1 = C_4^2$.

Như vậy cặp (d_1, d_2) và các đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ tạo ra "một lớp" gồm 6 hình chữ nhật. Hoàn toàn tương tự, với cặp (Δ_1, Δ_2) và 5 đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4, d_6 ta có: $C_5^2 = 10$ hình chữ nhật. Tóm lại: có C_5^2 lớp các hình chữ nhật, mỗi lớp gồm C_4^2 hình chữ nhật, nên ta có: $C_5^2 . C_4^2 =$ 10. 6 = 60 hình chữ nhật.

III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau.

(A) 2160 ; (B) 2610 ; (C) 2016 ; (D) 6210.

2. Giá trị của biểu thức : $P = \dfrac{A_6^4 + A_5^4}{A_4^4} - C_{25}^{23} + C_{15}^{13} + 3C_{10}^{7}$ là:

(A) 158 ; (B) 815 ; (C) 185 ; (D) 518.

3. Nghiệm của phương trình: $\dfrac{1}{C_4^x} - \dfrac{1}{C_5^x} = \dfrac{1}{C_6^x}$ là:

(A) x = 1 ; (B) x = 2 ; (C) x = 3 ; (D) x = 4.

4. Gọi n là số cạnh của đa giác lồi. Biết rằng số các đường chéo của đa giác đó là 35. Thế thì:

(A) n = 7 ; (B) n = 8 ; (C) n = 9 ; (D) n= 10.

5. Một tổ học sinh gồm 8 nam và 6 nữ. Cần lấy một nhóm gồm 5 học sinh của tổ trong đó có ít nhất 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

(A) 1456 ; (B) 1645 ; (C) 1465 ; (D) 1546.

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(A)	(C)	(B)	(D)	(D)

§3. NHỊ THỨC NIUTƠN

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Công thức nhị thức Niutơn:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n \quad (*) .$$

2. Chú ý: Trong công thức (*):

a) Số các hạng tử là n + 1.

b) Các hạng tử có số mũ của a giảm dần từ n đến 0, số mũ của b tăng dần từ 0 đến n. Tổng các số mũ của a và b trong mỗi hạng tử của công thức (*) bằng n.

c) Các hệ số của mỗi hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau.

3. Một số đẳng thức đặc biệt:

a) $2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$.

b) $0^n = (1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n$.

4. Tam giác Pa-xcan.

II. Bài tập căn bản

Bài 1: Viết khai triển theo công thức nhị thức Niutơn

a) $(a+2b)^5$; b) $\left(a-\sqrt{2}\right)^6$; c) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{13}$.

Giải

a) Áp dụng công thức (*), ta có:

$$(a+2b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4(2b) + C_5^2 a^3(2b)^2 + C_5^3 a^2(2b)^3 + C_5^4 a(2b)^4 + C_5^5(2b)^5$$

$$= a^5 + 10a^4b + 40a^3b^2 + 80a^2b^3 + 80ab^4 + 32b^5$$

b) $$\left(a-\sqrt{2}\right)^6 = C_6^0 a^6 - C_6^1 a^5\sqrt{2} + C_6^2 a^4(\sqrt{2})^2 - C_6^3 a^3(\sqrt{2})^3 + C_6^4 a^2(\sqrt{2})^4$$

$$-C_6^5 a(\sqrt{2})^5 + C_6^6(\sqrt{2})^6 = a^6 - 6\sqrt{2}a^5 + 30a^4 - 40\sqrt{2}a^3 + 60a^2 - 20\sqrt{2}a + 8.$$

c) $$\left(x-\frac{1}{x}\right)^{13} = C_{13}^0 x^{13} - C_{13}^1 x^{12}\frac{1}{x} + C_{13}^2 x^{11}\frac{1}{x^2} - C_{13}^3 x^{10}\frac{1}{x^3} + C_{13}^4 x^9\frac{1}{x^4}$$

$$-C_{13}^5 x^8\frac{1}{x^5} + C_{13}^6 x^7\frac{1}{x^6} - C_{13}^7 x^6\frac{1}{x^7} + C_{13}^8 x^5\frac{1}{x^8} - C_{13}^9 x^4\frac{1}{x^9}$$

$$+C_{13}^{10} x^3\frac{1}{x^{10}} - C_{13}^{11} x^2\frac{1}{x^{11}} + C_{13}^{12} x\frac{1}{x^{12}} - C_{13}^{13}\frac{1}{x^{13}}$$

$$= x^{13} - 13x^{11} + 78x^9 - 286x^7 + 715x^5 - 1287x^3 + 1716x$$

$$-\frac{1716}{x} + \frac{1287}{x^3} - \frac{715}{x^5} + \frac{286}{x^7} - \frac{78}{x^9} + \frac{13}{x^{11}} - \frac{1}{x^{13}}.$$

Bài 2: Tìm hệ số của x^3 trong khai triển của biểu thức: $\left(x+\dfrac{2}{x^2}\right)^6$.

Giải

Số hạng tổng quát của khai triển là: $C_6^k x^{6-k}.\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^k$

Ta có: $C_6^k x^{6-k}\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^k = 2^k.C_6^k x^{6-k}x^{-2k} = 2^k C_6^k x^{6-3k}$

Số hạng chứa x^3 trong khai triển sẽ là: $2^k.C_6^k x^{6-3k}$ với $6 - 3k = 3$ (1)

Từ (1) ta có $3k = 6 - 3 \Leftrightarrow 3k = 3 \Leftrightarrow k = 1$

Ta có: $2^1C_6^1 = 2.\dfrac{6!}{1!(6-1)!} = 2.6 = 12$

Vậy hệ số của x^3 trong khai triển bằng 12.

Bài 3: Biết hệ số của x^2 trong khai triển của $(1-3x)^n$ là 90. Tìm n.

Giải

Ta có $(1-3x)^n = C_n^0 - C_n^1 3x + C_n^2(3x)^2 - C_n^3(3x)^3 + ... + C_n^n(-3x)^n$.

Từ đây, ta có hệ số của x^2 là $9C_n^2$. Do đó, ta có:

$$9C_n^2 = 90 \Leftrightarrow C_n^2 = 10 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!.2!} = 10 \Leftrightarrow n(n-1) = 20$$

$\Leftrightarrow n^2 - n - 20 = 0 \Leftrightarrow n = 5$ (vì $n \in \mathbb{N}$).

Bài 4 : Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(x^3 + \dfrac{1}{x}\right)^8$.

Giải

Số hạng tổng quát của khai triển là: $C_8^k(x^3)^{8-k}\left(\dfrac{1}{x}\right)^k$

Ta có:

$$C_8^k(x^3)^{8-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k = C_8^k x^{24-3k}x^{-k} = C_8^k x^{24-4k}$$

Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với giá trị của k là:

$$24 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 6.$$

Ta có: $C_8^6 = \dfrac{8!}{6!(8-6)!} = 28$

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là 28.

Bài 5: Từ khai triển biểu thức $(3x - 4)^{17}$ thành đa thức, hãy tính tổng các hệ số của đa thức nhận được.

Giải

Đặt $f(x) = (3x-4)^{17} = a_{17}x^{17} + a_{16}x^{16} + ... + a_1x + a_0$.

Ta cần tính: $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{17}$.

Dễ thấy $f(1) = (3-4)^{17} = a_0 + a_1 + ... + a_{17}$

$$\Leftrightarrow a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{17} = -1$$

Bài 6: Chứng minh rằng:

a) $11^{10} - 1$ chia hết cho 100;

b) $101^{100} - 1$ chia hết cho 10 000;

c) $\sqrt{10}\left[\left(1+\sqrt{10}\right)^{100} - \left(1-\sqrt{10}\right)^{100}\right]$ là một số nguyên.

Giải

a) Ta có $11^{10} = (10+1)^{10} = C_{10}^{0}10^{10} + C_{10}^{1}10^{9} + ... + C_{10}^{8}10^{2} + C_{10}^{9}10 + C_{10}^{10}.$

$$= 100(C_{10}^{0}10^{8} + C_{10}^{1}10^{7} + ... + C_{10}^{8} + 1) + 1.$$

Vì vậy $11^{10} - 1 = 100(C_{10}^{0}10^{8} + C_{10}^{1}10^{7} + ... + C_{10}^{8} + 1)$ chia hết cho 100.

b) $101^{100} = (100+1)^{100} = C_{100}^{0}100^{100} + C_{100}^{1}100^{99} + ... + C_{100}^{99}100 + C_{100}^{100}$

$$= 100^2\left[C_{100}^{0}100^{98} + C_{100}^{1}100^{97} + ... + 1\right] + 1$$

Do vậy $101^{100} = 10000\left[C_{100}^{0}100^{98} + C_{100}^{1}100^{97} + ... + 1\right]$

chia hết cho 10 000.

c) Ta có $\left(1+\sqrt{10}\right)^{100} = C_{100}^{0} + C_{100}^{1}\sqrt{10} + C_{100}^{2}\sqrt{10^2} + ... + C_{100}^{99}\sqrt{10^{99}} + C_{100}^{100}$

$$\left(1-\sqrt{10}\right)^{100} = C_{100}^{0} - C_{100}^{1}\sqrt{10} + C_{100}^{2}\sqrt{10^2} + ... - C_{100}^{99}\sqrt{10^{99}} + C_{100}^{100}.$$

Do đó $\left(1+\sqrt{10}\right)^{100} - \left(1-\sqrt{10}\right)^{100} = 2(C_{100}^{1}\sqrt{10} + C_{100}^{3}\sqrt{10^3} + ... + C_{100}^{99}\sqrt{10^{99}})$.

Vậy nên: $\sqrt{10}\left[\left(1+\sqrt{10}\right)^{100} - \left(1-\sqrt{10}\right)^{100}\right]$.

II. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Tổng sau đây bằng bao nhiêu?

$$S = C_n^0 + 6C_n^1 + 6^2C_n^2 + ... + 6^nC_n^n.$$

(A) 5^n ; (B) 6^n ; (C) 7^n ; (D) 8^n.

2. Cho $f(x) = (4x+3)^{15}$. Sau khi khai triển và rút gọn có được $f(x) = a_{15}x^{15} + a_{14}x^{14} + ... + a_1x + a^0$.

Đặt : $S = -a_{15} + a_{14} - a_{13} + a_{12} + ... - a_1 + a_0$. Thế thì:

(A) $S = 1$; (B) $S = -1$; (C) $S = 7^{15}$; (D) $S = -7^{15}$.

3. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{12}$ là:

(A) 252 ; (B) 5 ; (C) 10 ; (D) 210.

4. Giá trị của biểu thức:
$A = C_7^0 + 2C_7^1 + 4C_7^2 + 8C_7^3 + 16C_7^4 + 32C_7^5 + 64C_7^6 + 128C_7^7$ là:

(A) 1278 ; (B) 2871 ; (C) 2718 ; (D) 2187.

5. Số hạng không chứa x trong khai triển Niutơn của $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ với $x > 0$ là:

(A) 35 ; (B) 21 ; (C) 7 ; (D) 1.

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(A)	(B)	(A)	(D)	(A)

§4. PHÉP THỬ VÀ BIẾN CỐ

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa phép thử: Phép thử ngẫu nhiên là phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó.

2. Định nghĩa không gian mẫu: Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử và ký hiệu là: Ω.

3. Biến cố: là một tập hợp con của không gian mẫu.

4. Tập rỗng được gọi là biến cố không thể (biến cố không). Còn tập Ω là biến cố chắc chắn.

5. Phép toán trên biến cố.

- Tập $\Omega \setminus A$ được gọi là biến cố đối của biến cố A, ký hiệu là $\overline{A}$.
- Tập $A \cup B$ được gọi là hợp của hai biến cố A và B.
- $A \cap B$ được gọi là giao của hai biến cố A và B.
- Hai biến cố A và B là xung khắc nếu $A \cap B = \varnothing$ (chúng không khi nào xảy ra trong một phép thử).

II. Bài tập căn bản

Bài 1: Gieo một đồng tiền 3 lần

a) Mô tả không gian mẫu;

b) Xác định các biến cố:

A: "lần đầu xuất hiện mặt sấp";

B: "mặt sấp xảy ra đúng một lần";

C: "mặt ngửa xảy ra ít nhất một lần";

Giải

a) Nếu ký hiệu N là mặt ngửa của đồng tiền xuất hiện;

S là mặt sấp của đồng tiền xuất hiện.

Thì không gian mẫu sẽ là:

$\Omega = \{SSS, NNN, SSN, SNS, NSS, NNS, NSN, SNN\}$, trong đó, chẳng hạn, SSN là kết quả: "lần đầu và lần 2 xuất hiện mặt sấp, lần cuối cùng xuất hiện mặt ngửa".

b) Xác định các biến cố:

$A = \{SSS, SSN, SNS, SNN\}$.

$B = \{NNS, NSN, SNN\}$.

$C = \{NNN, SSN, SNS, NSS, NNS, NSN, SNN\}$.

Bài 2 : Gieo một con súc sắc hai lần.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Phát biểu các biến cố sau dưới dạng mệnh đề:

$A = \{(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5);(6,6)\}$.

$B = \{(2,6);(6,2);(5,3);(3,5);(4,4)\}$.

$C = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6)\}$.

Giải

a) $\Omega = \{(i, j) \setminus i, j = 1,2,3,4,5,6\}$, ở đó (i, j) là kết quả "lần đầu xuất hiện mặt i chấm, lần sau xuất hiện mặt j chấm".

b) • Biến cố A: "Mặt 6 chấm xuất hiện khi gieo lần đầu";

• Biến cố B: "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo là 8";

• Biến cố C: "Số chấm xuất hiện trong hai lần gieo là như nhau".

Bài 3 : Một hộp chứa bốn cái thẻ được đánh số 1, 2, 3, 4. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố sau:

A: "Tổng các số trên hai thẻ là số chẵn";

B: "Tích các số trên hai thẻ là số chẵn".

Giải

a) Mỗi một cách lấy hai thẻ là một phần tử của không gian mẫu. Nếu ký hiệu $\{i, j\}$ là lấy được hai thẻ i và số j thì không gian mẫu sẽ là:

$\Omega = \{\{1,2\};\{1,3\};\{1,4\};\{2,3\};\{2,4\};\{3,4\}\}$.

b) Xác định các biến cố:

$A = \{\{1,3\};\{2,4\}\}$

$B = \{\{1,2\};\{1,4\};\{2,3\};\{2,4\};\{3,4\}\}$.

Bài 4: Hai xạ thủ bắn vào bia. Ký hiệu A_k là biến cố: "Người thứ k bắn trúng", k = 1, 2.

a) Hãy biểu diễn các biến cố sau qua các biến cố A_1, A_2:

A: "không ai bắn trúng";

B: "Cả hai cùng bắn trúng";

C: "Có đúng một người bắn trúng";

D: "Có ít nhất một người bắn trúng".

b) Chứng tỏ rằng: $A = \overline{D}$; B và C xung khắc.

Giải

Từ giả thiết ta có: $\overline{A_k}$: "Người thứ k bắn không trúng".

a) Vì thế biến cố A chính là: $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$.

- Biến cố B: "Cả hai cùng bắn trúng" chính là $A_1 \cap A_2$.

- Biến cố C: "Có đúng một người bắn trúng" có thể viết tường minh hơn là: "Người thứ nhất bắn trúng đồng thời người thứ hai bắn không trúng hoặc người thứ nhất bắn không trúng đồng thời người thứ hai bắn trúng". Do đó ta có thể thấy : $C = (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2)$.

- Biến cố D: "có ít nhất một người bắn trúng" có thể phát biểu lại là: "Người thứ nhất bắn trúng hoặc người thứ hai bắn trúng, hoặc cả hai người cùng bắn trúng". Do đó $D = A_1 \cup A_2 \cup (A_1 \cap A_2) = A_1 \cup A_2$ (vì $A_1 \cap A_2 \subset A_1 \cup A_2$).

b) Gọi không gian mẫu là Ω.

Ta có $A \cap D = \varnothing$.

Mặt khác $A \cup D$: "Không có ai bắn trúng hoặc có ít nhất một người bắn trúng", là biến cố chắc chắn xảy ra hay $A \cup D = \Omega$.

Do đó $A = \overline{D}$.

Dễ thấy rằng $B \cap C = \varnothing$ vì hai mệnh đề: "Cả hai đều bắn trúng" và "Có đúng một người bắn trúng" không thể cùng đúng. Do vậy B và C xung khắc.

Bài 5: Từ một hộp chứa 10 cái thẻ, trong đó các thẻ đánh số 1, 2, 3, 4, 5 màu đỏ, thẻ đánh số 6 màu xanh và các thẻ đánh số 7, 8, 9, 10 màu trắng. Lấy ngẫu nhiên một thẻ.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Ký hiệu A, B, C là các biến cố sau:

A: "Lấy được thẻ màu đỏ";

B: "Lấy được thẻ màu trắng";

C: "Lấy được thẻ ghi số chẵn".

Hãy biểu diễn các biến cố A, B, C bởi các tập con tương ứng của không gian mẫu.

Giải

a) Ta ký hiệu các thẻ đánh số 1, 2, 3, 4, 5 mang màu $Đ_1$, $Đ_2$, $Đ_3$, $Đ_4$, $Đ_5$. Thẻ số 6 mang màu xanh là: X_6. Các thẻ đánh số 7, 8, 9, 10 mang màu trắng là: T_7, T_8, T_9, T_{10}. Lấy ngẫu nhiên một thẻ, không gian mẫu sẽ là: $\Omega = \{Đ_1, Đ_2, Đ_3, Đ_4, Đ_5, X_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}\}$.

b) Ta có: $A = \{Đ_1, Đ_2, Đ_3, Đ_4, Đ_5\}$;

$B = \{T_7, T_8, T_9, T_{10}\}$;

$C = \{Đ_2, Đ_4, X_6, T_8, T_{10}\}$.

Bài 6: Gieo một đồng tiền liên tiếp cho đến khi lần đầu tiên xuất hiện mặt sấp hoặc cả bốn lần mặt ngửa xuất hiện thì dừng lại.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố:

A: "Số lần gieo không vượt quá 3".

B: "Số lần gieo là bốn".

Giải

a) Ký hiệu S là đồng tiền xuất hiện mặt sấp, N là đồng tiền xuất hiện mặt ngửa. Thế thì: $\Omega = \{S, NS, NNS, NNNS, NNNN\}$.

Ở đó, chẳng hạn NS là lần đầu xuất hiện mặt ngửa, lần hai xuất hiện mặt sấp.

b) $A = \{S, NS, NNS\}$; $B = \{NNNS, NNNN\}$.

Bài 7: Từ một hộp chứa 5 quả cầu được đánh số 1, 2, 3, 4, 5, lấy ngẫu nhiên liên tiếp hai lần mỗi lần một quả và xếp theo thứ tự từ trái sang phải.

a) Xây dựng không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố:

A: "Chữ số sau lớn hơn chữ số trước";

B: "Chữ số trước gấp đôi chữ số sau";

C: "Hai chữ số bằng nhau".

Giải

a) Khi lấy ngẫu nhiên liên tiếp hai quả cầu ta có quả cầu lấy lần một được đánh số i, quả cầu lấy lần hai được đánh số là j (i, j = 1, 2, 3, 4, 5; i $\neq$ j). Ta ký hiệu bộ hai quả cầu này là (i; j). Khi đó không gian mẫu là: $\Omega = \{(i, j) \setminus i, j = 1, 2, 3, 4, 5; i \neq j\}$.

Hiển nhiên $n(\Omega) = A_5^2 = 20$.

b) Ta có: $A = \{(i, j) \setminus i, j = 1, 2, 3, 4, 5; i < j\}$

$$= \{(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(2,3);(2,4);(2,5);(3,4);(3,5);(4,5)\}.$$

Khi đó n(A) = 10.

* $B = \{(2i, i) \setminus i = 1, 2, 3, 4, 5; 2i \leq 4\} = \{(2,1);(4,2)\}$

* $C = \varnothing$ vì chỉ có 5 quả cầu đánh số 1, 2, 3, 4, 5 nên đã lấy ra quả đánh số i thì không thể còn quả đánh số i trong hộp nữa và do đó rút lần 2 sẽ không thể được quả đánh số i.

III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Hai xạ thủ cùng bắn vào bia. Ký hiệu A_k là biến cố: "người thứ **k** bắn không trúng bia".

1a. Biến cố "Cả hai xạ thủ bắn trúng bia" là:

(A) $A_1 \cap A_2$; (B) $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$; (C) $\overline{A_1} \cap A_2$; (D) $A_1 \cap \overline{A_2}$.

1b. Biến cố "Có đúng một người bắn trúng bia" là:

(A) $(A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2)$; (B) $A_1 \cap \overline{A_2}$; (C) $A_1 \cap A_2$; (D) $\overline{A_1} \cap A_2$.

2. Có 10 viên bi được đánh số liên tiếp từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên cùng một lúc hai viên bi.

2a. Số phần tử của không gian mẫu là:

(A) 90 ; (B) 60 ; (C) 45 ; (D) 30

2b. Gọi M là biến cố: "Tổng hai số trên hai viên bi không nhỏ hơn 10". Số phần tử của M là:

(A) 16 ; (B) 17 ; (C) 18 ; (D) 19 .

3. Gieo một con súc sắc hai lần. Xác suất của biến cố "Tổng số chấm trong hai lần gieo là 8" là:

(A) $\frac{5}{36}$; (B) $\frac{1}{6}$; (C) $\frac{7}{36}$; (D) $\frac{8}{36}$.

IV. Đáp số

Câu	1a	1b	2a	2b	3
Đáp án	(B)	(A)	(C)	(D)	(A)

§5. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa: Giả sử A là biến cố liên quan đến một phép thử chỉ có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện.

Ta gọi tỉ số $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$ là xác suất của biến cố A. Ký hiệu P(A).

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

(n(A) là số phần tử của tập A hay cũng là số các kết quả thuận lợi cho biến cố A, còn $n(\Omega)$ là số các kết quả có thể xảy ra của phép thử).

2. Tính chất của xác suất:

Giả sử A và B là các biến cố liên quan đến phép thử có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện.

a) Định lý: • $P(\varnothing) = 0$; $P(\Omega) = 1$.

• $0 \le P(A) \le 1$, với mọi biến cố A.

• Nếu A và B xung khắc thì: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

b) Hệ quả: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, với mọi biến cố A.

3. Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu sự xảy ra của biến cố A không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố B và ngược lại. Ta có: A, B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi P(A.B) = P(A).P(B).

II. Bài tập căn bản

Bài 1: Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần.

a) Hãy mô tả không gian mẫu;

b) Xác định các biến cố sau:

A: "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo không bé hơn 10";

B: "Mặt 5 chấm xuất hiện ít nhất một lần";

c) Tính P(A), P(B).

Giải

a) Mô tả không gian mẫu: $\Omega = \{(i, j) \setminus 1 \le i, j \le 6; i, j \in \mathbb{Z}\}$.

b) * Biến cố A: "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo không bé hơn 10" là: $A = \{(4,6);(5,6);(5,5);(6,4);(6,5);(6,6)\}$.

* Biến cố B: "Mặt 5 chấm xuất hiện ít nhất một lần" là:
$B = \{(5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);(1,5);(2,5);(3,5);(4,5);(6,5)\}$.

c) Ta có $n(A) = 6$ nên $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{6}$;

$n(B) = 11$ nên $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{11}{36}$.

Bài 2: Có bốn tấm bìa được đánh số từ 1 đến 4. Rút ngẫu nhiên ba tấm.

a) Hãy mô tả không gian mẫu.

b) Xác định biến cố sau:

A: "Tổng các số trên ba tấm bìa bằng 8";

B: "Các số trên ba tấm bìa là các số tự nhiên liên tiếp".

c) Tính P(A), P(B).

Giải

a) Không gian mẫu: $\Omega = \{\{1,2,3\};\{1,2,4\};\{1,3,4\};\{2,3,4\}\}$.

b) * A: "Tổng các số trên ba tấm bìa bằng 8" là: $A = \{\{1,3,4\}\}$.

* B: "Các số trên ba tấm bìa là các số tự nhiên liên tiếp" là:
$B = \{\{1,2,3\};\{2,3,4\}\}$.

c) Từ trên dễ có $P(A) = \dfrac{1}{4}$; $P(B) = \dfrac{1}{2}$.

Bài 3: Một người bạn chọn ngẫu nhiên hai chiếc giày từ bốn đôi giày cỡ khác nhau. Tính xác suất để hai chiếc chọn được tạo thành một đôi.

Giải

Để đơn giản ta ký hiệu: T_i, P_i là hai chiếc giày của cùng một đôi giày cỡ i $(1 \le i, i \in \mathbb{Z})$. Khi đó không gian mẫu sẽ là:

$$\Omega = \{\{T_1, P_1\}; \{T_1, T_2\}; \{T_1, P_2\}; \{T_1, T_3\}; \{T_1, P_3\}; \{T_1, T_4\}; \{T_1, P_4\};$$
$$\{P_1, T_2\}; \{P_1, P_2\}; \{P_1, T_3\}; \{P_1, P_3\}; \{P_1, T_4\}; \{P_1, P_4\} ...\}.$$

Khi đó $n(\Omega) = 28$.

Biến cố A lấy được một đôi giày là:
$A = \{\{T_1, P_1\}; \{T_2, P_2\}; \{T_3, P_3\}; \{T_4, P_4\}\}$.

Do đó $n(A) = 4$.

Vì vậy $P(A) = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$.

Bài 4: Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất. Giả sử con súc sắc xuất hiện mặt b chấm. Xét phương trình:
$x^2 + bx + 2 = 0$. Tính xác suất sao cho:

a) Phương trình có nghiệm;

b) Phương trình vô nghiệm;

c) Phương trình có nghiệm nguyên.

Giải

Xét phương trình: $x^2 + bx + 2 = 0$ (*) có $\Delta = b^2 - 8$ (b nguyên dương).

- (*) có nghiệm $\Leftrightarrow b \in \{3, 4, 5, 6\} = A_1$;
- (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow b \in \{1, 2\} = A_2$;
- (*) có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow b \in \{3\} = A_3$.

Khi gieo con súc sắc ta có không gian mẫu là: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Xác suất của biến cố A_1 là: $P(A_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$ (*) có nghiệm với xác suất là $\frac{2}{3}$.

Xác suất của biến cố A_2 là: $P(A_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$ (*) vô nghiệm với xác suất là $\frac{1}{3}$.

Xác suất của biến cố A_3 là: $P(A_3) = \frac{1}{6} \Leftrightarrow$ (*) có nghiệm nguyên với xác suất là $\frac{1}{6}$.

Bài 5: Từ cỗ bài tú lơ khơ 52 con rút ngẫu nhiên cùng một lúc 4 con. Tính xác suất sao cho:

a) Cả bốn con đều là át;

b) Được ít nhất một con át;

c) Được hai con át và hai con K.

Giải

Số cách rút 4 con bài trong cỗ bài 52 con là: $C_{52}^4 = 270725$.

a) Vì cả cỗ bài 52 con chỉ có 4 con át nên số cách rút ra 4 con đều là át là 1, do đó xác suất của biến cố này là: $P_1 = \dfrac{1}{270725}$.

b) Gọi A là biến cố trong 4 con bài rút ra có ít nhất 1 con là át. Khi đó $\overline{A}$ là biến cố cả 4 con rút ra đều không phải là át. Khi đó $n(\overline{A}) = C_{48}^4$ (bằng số cách bỏ 4 con át ra ngoài cỗ bài sau đó rút bất kỳ cùng một lúc 4 con bài).

Do đó $P(\overline{A}) = \dfrac{C_{48}^4}{C_{52}^4} \Rightarrow P(A) = 1 - \dfrac{C_{48}^4}{C_{52}^4} = \dfrac{C_{52}^4 - C_{48}^4}{C_{52}^4} \Rightarrow P(A) \approx 0,28126$.

c) Số cách rút được 2 con át và 2 con K là: $C_4^2 . C_4^2 = 36$.

Xác suất của biến cố rút được 2 con át và 2 con K là:

$$P_2 = \frac{36}{270725} \approx 0,000133.$$

Bài 6: Hai bạn nam và hai bạn nữ được xếp ngồi ngẫu nhiên vào bốn ghế xếp thành hai dãy đối diện nhau. Tính xác suất sao cho:

a) Nam, nữ ngồi đối diện nhau;

b) Nữ ngồi đối diện nhau.

Giải

a) Giả sử hai bạn nam là T_1, T_2; hai bạn nữ là G_1, G_2. Mỗi một cách xếp 4 bạn ngồi vào 4 ghế chính là một hoán vị của 4 phần tử T_1, T_2, G_1, G_2. Do đó số phần tử của không gian mẫu là $4! = 24$.

Ta quy ước dãy ghế thứ nhất gồm hai ghế được đánh số là ghế 1 và ghế 2. Dãy thứ hai gồm hai ghế còn lại được đánh số là ghế 3 và ghế 4. Trong đó người ngồi ở ghế 1 đối diện người ngồi ghế 3, người ngồi ghế 2 đối diện với người ngồi ghế 4. Khi đó biến cố nam, nữ ngồi đối diện nhau sẽ có 16 phần tử:

(T_1, T_2, G_1, G_2) ; (T_1, T_2, G_2, G_1) ; (T_1, G_1, G_2, T_2) ; (T_1, G_2, G_1, T_2)

(T_2, T_1, G_1, G_2) ; (T_2, T_1, G_2, G_1) ; (T_2, G_1, G_2, T_1) ; (T_2, G_2, G_1, T_1)

(G_1, G_2, T_1, T_2) ; (G_1, G_2, T_2, T_1) ; (G_1, T_1, T_2, G_2) ; (G_1, T_2, T_1, G_2)

(G_2, G_1, T_1, T_2) ; (G_2, G_1, T_2, T_1) ; (G_2, T_1, T_2, G_1) ; (G_2, T_2, T_1, G_1)

Vì thế xác suất của biến cố này là: $P_1 = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$.

b) Nhận thấy biến cố nữ ngồi đối diện nhau chính là biến cố nữ ngồi đối diện nhau và nam ngồi đối diện nhau. Đây chính là biến cố đối của biến cố nam và nữ ngồi đối diện nhau. Vì vậy xác suất của biến cố nữ ngồi đối diện nhau là P_2 và $P_2 = 1 - P_1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Bài 7: Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 6 quả cầu trắng, 4 quả cầu đen. Hộp thứ hai chứa 4 quả cầu trắng, 6 quả cầu đen. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên một quả. Ký hiệu:

A là biến cố: "Quả lấy từ hộp thứ nhất trắng";

B là biến cố: "Quả lấy từ hộp thứ hai trắng".

a) Xét xem A và B có độc lập không?

b) Tính xác suất cho hai quả cầu lấy ra cùng màu.

c) Tính xác suất cho hai quả cầu lấy ra khác màu.

Giải

a) Rõ ràng sự xảy ra của biến cố lấy ở hộp thứ nhất quả cầu trắng không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra biến cố lấy ở hộp thứ hai quả cầu màu trắng nên hai biến cố này là độc lập.

b) Ta có số khả năng lấy được quả cầu trắng từ hộp thứ nhất là 6.

Do đó, ta có $P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Tương tự như vậy ta tính được $P(B) = \frac{2}{5}$.

Vì A và B là hai biến cố độc lập nên đặt $C = A \cap B$, ta có $P(C) = P(A) . P(B) = \frac{6}{25}$.

Như vậy xác suất để lấy được hai quả đều màu trắng là $\frac{6}{25}$.

Tương tự như vậy, xác suất lấy được hai quả cùng màu đen (mỗi quả ở mỗi hộp) cũng là $\frac{6}{25}$.

Vì các biến cố "hai quả cùng màu đen" , "hai quả cùng màu trắng" là xung khắc nên theo công thức xác suất ta có: xác suất để hai quả cầu cùng màu là: $P = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$.

c) Biến cố "2 quả cầu lấy ra khác màu" là biến cố đối của biến cố "2 quả cầu lấy ra cùng màu" nên xác suất của biến cố này là:

$P = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25}$.

III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Một hộp bóng đều có 12 bóng, trong đó có 7 bóng tốt. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng.

1a. Xác suất để lấy được 3 bóng đều là tốt là:

(A) $\frac{5}{44}$; (B) $\frac{6}{44}$; (C) $\frac{7}{44}$; (D) $\frac{8}{44}$.

1b. Xác suất để lấy được ít nhất 2 bóng tốt là:

(A) $\frac{7}{11}$; (B) $\frac{8}{11}$; (C) $\frac{9}{11}$; (D) $\frac{10}{11}$.

1c. Xác suất để lấy được ít nhất 1 bóng tốt là:

(A) $\frac{9}{11}$; (B) $\frac{19}{22}$; (C) $\frac{10}{11}$; (D) $\frac{21}{22}$.

2. Gieo đồng thời 3 đồng xu cân đối đồng chất. Xác suất để có ít nhất một mặt sấp xuất hiện là:

(A) $\frac{3}{4}$; (B) $\frac{7}{8}$; (C) $\frac{5}{8}$; (D) $\frac{1}{2}$.

3. Một đợt xổ số phát hành 20 000 vé, trong đó có một giải nhất, 100 giải nhì, 200 giải ba, 1 000 giải tư và 5 000 giải khuyến khích. Xác suất để một người mua 3 vé, trúng một giải nhì và hai giải khuyến khích?

(A) $\frac{C_{200}^1 . C_{5000}^2}{C_{20000}^3}$; (B) $\frac{C_{200}^1 + C_{5000}^2}{C_{20000}^3}$;

(C) $\frac{C_{200}^1 . C_{50000}^2}{C_{20000}^3}$; (D) $\frac{C_{200}^1 + C_{50000}^2}{C_{20000}^3}$.

IV. Đáp số

Câu	1a	1b	1c	2	3
Đáp án	(C)	(A)	(D)	(B)	(C)

ÔN TẬP CHƯƠNG II

I. Câu hỏi và bài tập tự luận:

Bài 1: Phát biểu quy tắc cộng, cho ví dụ áp dụng.

Trả lời

• Quy tắc: Một công việc được thực hiện bởi một trong hai hành động. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kỳ cách nào của hành động thứ nhất, thì công việc đó có m + n cách thực hiện.

• Ví dụ áp dụng:

Trong một cái hộp có đựng 5 quả cầu đen được đánh số từ 1 đến 5, và 7 quả cầu trắng được đánh số từ 6 đến 12. Có bao cách chọn một trong số quả cầu đó.

Giải

Vì các quả cầu trắng hoặc đen đều được đánh số phân biệt nên mỗi cách lấy ra một quả cầu bất kỳ là một lần chọn. Nếu chọn quả cầu đen thì có 5 cách chọn. Nếu chọn quả cầu trắng thì có thì có 7 cách chọn. Do vậy, số cách chọn một trong các quả cầu là: 5 + 7 = 12 (cách).

Bài 2: Phát biểu quy tắc nhân, cho ví dụ áp dụng.

Trả lời

• Quy tắc: Một công việc được thực hiện bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai, thì có m.n cách hoàn thành công việc.

• Ví dụng áp dụng:

Từ các chữ số 1,2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể thành lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số phân biệt.

Giải

Gọi số tự nhiên thỏa mãn điều kiện là $\overline{abcd}$.

Có 7 cách chọn số a, 6 cách chọn số b, 5 cách chọn số c và 4 cách chọn số d. Do đó có tổng cộng là: 7.6.5.4 = 840 số.

Bài 3: Phân biệt sự khác nhau giữa một chỉnh hợp chập k của n phần tử và một tổ hợp chập k của n phần tử.

Trả lời

Đặc điểm khác nhau quan trọng nhất trong hai định nghĩa chỉnh hợp và tổ hợp chập k của n phần tử đó là: đối với chỉnh hợp chập k của n phần tử, k phần tử lấy ra từ n phần tử có yêu cầu sắp thứ tự còn đối với tổ hợp thì không.

Bài 4: Có bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số được tạo thành từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 sao cho:

a) Các chữ số có thể giống nhau?

b) Các chữ số khác nhau?

Giải

a) Gọi số chẵn có 4 chữ số được tạo thành từ các số đã cho có dạng $\overline{abcd}$.

Rõ ràng có 4 cách chọn số d, 7 cách chọn c, 7 cách chọn b và 6 cách chọn a. Theo quy tắc nhân có cả thảy: 4.7.7.6 = 1176 (số).

b) Gọi số chẵn thỏa mãn yêu cầu là $\overline{abcd}$. Ta chia thành hai trường hợp sau:

* Trường hợp 1: Số chẵn đó có chữ số hàng nghìn là chẵn và khác 0: có 3 cách chọn số a, 3 cách chọn số d, 5 cách chọn số c, 4 cách chọn số b, do đó có: 3.3.5.4 = 180 số.

* Trường hợp 2: Số chẵn có chữ số hàng nghìn là số lẻ: có 3 cách chọn số a, 4 cách chọn số d, 5 cách chọn số c, 4 cách chọn số b, do đó có: 3.4.5.4 = 240 số.

Vậy có tổng cộng là: 180 + 240 = 420 số.

Bài 5: Xếp ngẫu nhiên ba bạn nam và ba bạn nữ ngồi vào 6 ghế kê theo hàng ngang. Tìm xác suất sao cho:

a) Nam, nữ ngồi xen kẽ nhau;

b) Ba bạn nam ngồi cạnh nhau.

Giải

Rõ ràng một cách xếp 6 bạn ngồi vào 6 chiếc ghế chính là một phần tử của không gian mẫu. Bởi vậy số phần tử của không gian mẫu là: 6! = 720.

Giả sử các ghế được đánh số từ 1 đến 6 như sau:

Ghế 1 Ghế 2 Ghế 3 Ghế 4 Ghế 5 Ghế 6.

a) Để xếp được các bạn nam, nữ xen kẽ nhau ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: 3 bạn nam ngồi vào các vị trí Ghế 1, Ghế 3, Ghế 5. Các bạn nữ ngồi ghế còn lại. Khi đó có 3! . 3! cách xếp hay có: 36 cách xếp.

Trường hợp 2: 3 bạn nữ ngồi vào các vị trí Ghế 1, Ghế 3, Ghế 5.Còn các bạn nam ngồi vào các ghế còn lại. Khi đó có 3! x 3! cách xếp hay có: 36 cách xếp.

Vậy cả hai trường hợp có tổng cộng là 72 cách xếp để các bạn nam, nữ ngồi xen kẽ nhau.

Bởi vậy xác suất của biến cố này là $P_1 = \frac{72}{720} = \frac{1}{10}$.

b) Để xếp được ba bạn nam ngồi cạnh nhau thì có những trường hợp sau đây:

+ Ba bạn nam ngồi vào các ghế 1, 2, 3.

+ Ba bạn nam ngồi vào các ghế 2, 3, 4.

+ Ba bạn nam ngồi vào các ghế 3, 4, 5.

+ Ba bạn nam ngồi vào các ghế 4, 5, 6.

Trường hợp 1: Ba bạn nam ngồi vào các ghế 1, 2, 3. Có 3! cách xếp ba bạn nam vào các vị trí này. Ứng với mỗi cách xếp ba bạn nam ngồi vào các ghế 1, 2, 3 có 3! cách xếp 3 bạn nữ ngồi vào các ghế còn lại. Do đó có 3! . 3! = 36 cách xếp.

Các trường hợp còn lại đều được làm tương tự và mỗi trường hợp đều có 36 cách xếp.

Do đó có tổng cộng là 4 . 36 = 144 cách xếp cho 3 bạn nam ngồi cạnh nhau. Vậy xác suất của biến cố 3 bạn nam ngồi cạnh nhau là:

$$P_2 = \frac{144}{720} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Bài 6: Từ một hộp có 6 quả cầu trắng và 4 quả cầu đen, lấy ngẫu nhiên đồng thời 4 quả. Tính xác suất sao cho:

a) Bốn quả lấy ra cùng màu;

b) Có ít nhất một quả màu trắng.

Giải

Ta có, mỗi một cách lấy 4 quả bất kỳ trong 10 quả cầu ở trong hộp là một phần tử của không gian mẫu. Do đó có tất cả $C_{10}^4 = 210$ cách (không gian mẫu có 210 phần tử).

a) Chỉ có đúng một khả năng lấy được 4 quả cầu cùng màu đen, C_6^4 khả năng lấy được 4 quả cầu cùng màu trắng.

Do đó số các khả năng lấy được 4 quả cầu cùng màu là: $1 + C_6^4 = 16$.

Vậy xác suất của biến cố lấy được 4 quả cầu cùng màu là:

$$P_1 = \frac{16}{210} = \frac{8}{105}.$$

b) Đặt A là biến cố: "Có ít nhất một quả cầu trắng".

B là biến cố: "4 quả cầu toàn màu đen".

Rõ ràng A và B là hai biến cố đối nhau.

Mặt khác chỉ có đúng một khả năng là cả 4 quả cầu lấy ra đều màu đen nên: $P(A) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{210} = \frac{209}{210}$.

Bài 7: Gieo một con súc sắc ba lần. Tính xác suất sao cho mặt sáu chấm xuất hiện ít nhất một lần.

Giải

Không gian mẫu gồm 216 phần tử có dạng:

$\Omega = \{(i, j, k) \setminus i, j, k \in \mathbb{Z}, 1 \le i, j, k \le 6\}$.

Đặt $A = \{(6, i, j) \setminus 1 \le i, j, \le 6\}$

$B = \{(i, 6, j) \setminus 1 \le i, j, \le 6\}$

$C = \{(i, j, 6) \setminus 1 \le i, j, \le 6\}$.

Gọi biến cố có ít nhất một mặt 6 chấm xuất hiện là D.

Ta có $D = A \cup B \cup C$, n(A) = 36, n(B) = 36, n(C) = 36.

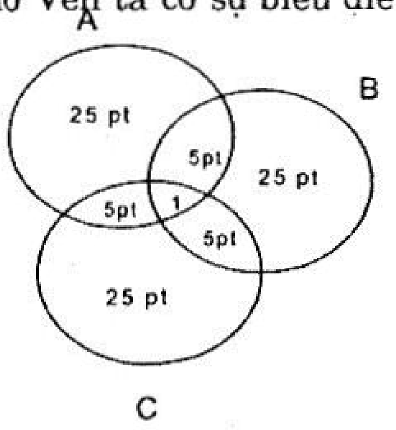
Mặt khác $A \cap B = \{(6,6,1); (6,6,2); (6,6,3); (6,6,4); (6,6,5); (6,6,6)\}$.

$B \cap C = \{(1,6,6); (2,6,6); (3,6,6); (4,6,6); (5,6,6); (6,6,6)\}$.

$C \cap A = \{(6,1,6); (6,2,6); (6,3,6); (6,4,6); (6,5,6); (6,6,6)\}$.

$A \cap B \cap C = \{(6,6,6)\}$.

Dùng sơ đồ Ven ta có sự biểu diễn sau:



Từ sơ đồ này ta có : $n(D) = n(A \cup B \cup C) = 91$ (phần tử).

Do đó xác suất của biến cố có ít nhất mặt 6 chấm xuất hiện là:

$P(D) = \frac{91}{216}$.

Bài 8: Cho một lục giác đều ABCDEF. Viết các chữ cái A, B, C, D, E, F vào sáu cái thẻ, lấy ngẫu nhiên hai thẻ. Tìm xác suất sao cho đoạn thẳng mà các đầu mút là các điểm được ghi trên thẻ:

a) Cạnh của lục giác;

b) Đường chéo của lục giác;

c) Đường chéo nối hai đỉnh đối diện của lục giác.

Giải

Ta có không gian mẫu là:

$$\Omega = \{\{A,B\};\{A,C\};\{A,D\};\{A,E\};\{A,F\};\{B,C\};\{B,D\};\{B,E\};\{B,F\};$$
$$\{C,D\};\{C,E\};\{C,F\};\{D,E\};\{D,F\};\{E,F\}\}.$$

Do vậy $n(\Omega) = 15$.

Gọi M là biến cố: "Hai điểm lấy được là hai đỉnh liên tiếp của lục giác ABCDEF". Khi đó:

$$M = \{\{A,B\};\{B,C\};\{C,D\};\{D,E\};\{E,F\};\{F,E\}\}.$$

Ta có $n(M) = 6$.

Gọi N là biến cố "Hai điểm lấy được tạo nên một đường chéo".

Rõ ràng $N = \overline{M}$ (vì các đoạn thẳng nối hai đỉnh của lục giác hoặc là cạnh, hoặc là đường chéo).

Các đường nối hai đỉnh đối diện của lục giác là: AD, BE, CF. Gọi Q là biến cố "Hai điểm lấy được là hai đỉnh đối diện của lục giác".

Từ đó ta dễ có: $P(M) = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$; $P(N) = \dfrac{3}{5}$; $P(Q) = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$.

Bài 9: Gieo đồng thời hai con súc sắc. Tính xác suất sao cho:

a) Hai súc sắc đều xuất hiện mặt chẵn.

b) Tích các số chấm trên hai con súc sắc đều là số lẻ.

Giải

Không gian mẫu là:

$$\Omega = \{\{1,1\};\{1,2\};\{1,3\};\{1,4\};\{1,5\};\{1,6\};\{2,2\};\{2,3\};\{2,4\};\{2,5\};$$
$$\{2,6\};\{3,3\};\{3,4\};\{3,5\};\{3,6\};\{4,4\};\{4,5\};\{4,6\};\{5,5\};\{5,6\};\{6,6\}$$
$$= \{\{i,j\} \setminus i \le j; 1 \le i,j \le 6\}.$$

Do vậy: $n(\Omega) = 21$.

Gọi A là biến cố: "Cả hai con súc sắc đều xuất hiện mặt chẵn".

Ta có: $A = \{\{2,2\};\{2,4\};\{2;6\};\{4,4\};\{4,6\};\{6,6\}\}$.

Nên: $n(A) = 6$

Từ đấy suy ra: $P(A) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$.

Gọi B là biến cố: "Tích các số chấm trên hai con súc sắc là một số lẻ". Khi đó: $B = \{\{1,1\};\{1,3\};\{1,5\};\{3,3\};\{3,5\};\{5,5\}\}$.

Nên $n(B) = 6$.

Từ đấy suy ra $P(B) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$.

II. Bài tập trắc nghiệm khách quan

Chọn các phương án đúng trong các bài tập sau:

Bài 10: Lấy hai con bài từ cỗ bài tú lơ khơ 52 con. Số cách lấy là:

(A) 104 ; (B) 1326 ; (C) 450 ; (D) 24 .

Giải

Số cách lấy ra hai con bài trong 52 con chính là số các tổ hợp chập 2 của 52 phần tử. Vậy số cách lấy là: $C_{52}^2 = 1326$.

Vậy phương án đúng là phương án (B).

Bài 11: Năm người được xếp vào ngồi quanh một bàn tròn với năm ghế. Số cách xếp là:

(A) 50 ; (B) 100 ; (C) 120 ; (D) 24.

Giải

Số cách xếp 5 người quanh một 1 chiếc bàn tròn gồm 5 ghế chính là số hoán vị của 5 phần tử. Do đó số cách xếp là: $5! = 120$.

Vậy phương án đúng là phương án (C).

Bài 12: Gieo một con súc sắc hai lần. Xác suất để ít nhất một lần xuất hiện mặt sáu chấm là:

(A) $\frac{12}{36}$; (B) $\frac{11}{36}$; (C) $\frac{6}{36}$; (D) $\frac{8}{36}$.

Giải

Ta có không gian mẫu là: $\Omega = \{(i,j) \setminus i,j \in \mathbb{Z}, 1 \le i,j \le 6\}$ và $n(\Omega) = 36$.

Gọi A là biến cố: "ít nhất một lần xuất hiện mặt sáu chấm".

Khi đó :

$A = \{\{6,1\};\{6,2\};\{6,3\};\{6,4\};\{6,5\};\{6,6\};\{1,6\};\{2,6\};\{3,6\};\{4,6\};\{5,6\}\}$

Vì vậy $n(A) = 11$.

Do đó $P(A) = \frac{11}{36}$ nên phương án đúng là phương án (B).

Bài 13: Từ một hộp chứa ba quả cầu trắng và hai quả cầu đen, lấy ngẫu nhiên hai quả. Xác suất để lấy được hai quả trắng là:

(A) $\frac{9}{30}$; (B) $\frac{12}{30}$; (C) $\frac{10}{30}$; (D) $\frac{6}{30}$.

Giải

Không gian mẫu có số phần tử là: $n(\Omega) = C_5^2 = 10$.

Số khả năng lấy được cả hai quả cầu trắng là: $C_3^2 = 3$.

Do đó xác suất để lấy được cả hai quả cầu trắng là: $P = \frac{3}{10} = \frac{9}{30}$.

Do đó phương án (A) là phương án đúng.

Bài 14: Gieo ba con súc sắc. Xác xuất để số chấm xuất hiện trên ba con như nhau là:

(A) $\frac{12}{216}$; (B) $\frac{1}{216}$; (C) $\frac{6}{216}$; (D) $\frac{3}{216}$.

Giải

Không gian mẫu có 216 phần tử $\Omega = \{(i, j, k) \setminus i, j, k \in \mathbb{Z}, 1 \leq i, j, k \leq 6\}$

Biến cố A: " Số chấm xuất hiện trên 3 con là như nhau" được viết là:
$A = \{(1,1,1);(2,2,2);(3,3,3);(4,4,4);(5,5,5);(6,6,6)\}$

$\Rightarrow n(A) = 6$

Do đó $P(A) = \frac{6}{216}$, nên phương án (C) là đúng.

Bài 15: Gieo một đồng tiền cân đối và đồng chất bốn lần. Xác suất để cả bốn lần xuất hiện mặt sấp là:

(A) $\frac{4}{16}$; (B) $\frac{2}{16}$; (C) $\frac{1}{16}$; (D) $\frac{6}{16}$.

Giải

Không gian mẫu Ω có 16 phần tử, đó là:
(S, S, S, S) ; (S, S, S, N) ; (S, S, N, S) ; (S, N, S, S); (N, S, S, S);
(S, S, N, N) ; (S, N, S, N) ; (N, S, N, S) ; (N, N, S, S) ; (S, N, N, S);
(N, S, S, N) ; (N, N, N, S) ; (N, N, S, N) ; (N, S, N, N) ; (S, N, N, N);
(N, N, N, N) (với kí hiệu N là xuất hiện mặt ngửa, S là xuất hiện mặt sấp).

A: "Cả 4 lần xuất hiện mặt sấp". Từ đây ta suy ra: n(A) = 1.

Vì vậy $P(A) = \frac{1}{16}$, phương án (C) là phương án đúng.

CHƯƠNG III: DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

I. Tóm tắt lý thuyết

Để chứng minh những mệnh đề liên quan đến số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$ là đúng với mọi n mà không thể thử trực tiếp được thì có thể làm như sau:

Bước 1: Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n = 1$.

Bước 2: Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kỳ $n = k \geq 1$ (gọi là giả thiết quy nạp), chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k+1$.

Cách chứng minh một mệnh đề như trên gọi là phương pháp quy nạp toán học, hay gọi tắt là phương pháp quy nạp.

II. Bài tập căn bản

Bài 1: Chứng minh rằng $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức:

a) $2 + 5 + 8 + \ldots + 3n - 1 = \dfrac{n(3n+1)}{2}$;

b) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$;

c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Giải

a) Khi $n = 1$ ta thấy đẳng thức đã cho đúng. Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là: $2 + 5 + 8 + \ldots + 3k - 1 = \dfrac{k(3k+1)}{2}$ (1) (giả thiết quy nạp).

Ta phải chứng minh rằng đẳng thức đã cho cũng đúng với $n = k + 1$, tức là: $2 + 5 + 8 + \ldots + 3k - 1 + 3k + 2 = \dfrac{(k+1)(3k+4)}{2}$ (2)

Thật vậy từ (1) ta có:

$$(2 + 5 + 8 + \ldots + 3k - 1) + 3k + 2 = \frac{k(3k+1)}{2} + 3k + 2$$

$$= \frac{k(3k+1) + 2(3k+1)}{2} = \frac{3k^2 + 7k + 4}{2} = \frac{(k+1)(3k+4)}{2}.$$

Vậy (2) đúng $\Rightarrow$ (đpcm).

b) Khi $n = 1$, đẳng thức đã cho là đúng.

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, tức là:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+.....+\frac{1}{2^k}=\frac{2^k-1}{2^k}$ (1)

Ta phải chứng minh rằng đẳng thức đã cho cũng đúng với n = k + 1,

tức là: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+.....+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}$ (2).

Thật vậy từ (1) ta có:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+.....+\frac{1}{2^k}\right)+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{2^k-1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{2(2^k-1)+1}{2^{k+1}}=\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}$$

Vậy (2) đúng, từ đó ⇒ (đpcm).

c) Khi n = 1, đẳng thức đã cho là đúng.

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, tức là:

$1^2+2^2+3^2+....+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ (1)

Ta phải chứng minh rằng đẳng thức đã cho cũng đúng với n = k + 1,

tức là: $1^2+2^2+3^2+....+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ (2).

Thật vậy từ (1) ta có:

$$(1^2+2^2+3^2+....+k^2)+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6}$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Vậy (2) đúng, từ đó ⇒ (đpcm).

Bài 2: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có:

a) $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3;

b) $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9;

c) $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Giải

a) Đặt $A_n = n^3 + 3n^2 + 5n$.

Khi n = 1 ta có $A_1 = 9 \vdots 3$.

Giả sử $n = k \geq 1$ ta có $A_k = (k^3 + 3k^2 + 5k) \vdots 3$ (1) (giả thiết quy nạp).

Ta phải chứng minh mệnh đề đúng với n = k + 1, tức là: $A_{k+1} \vdots 3$ (2)

Thật vậy, ta có:

$A_{k+1} = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1) = (k^3 + 3k^2 + 5k) + 3k^2 + 9k + 9$

$= A_k + 3(k^2 + 3k + 3)$.

Theo giả thiết quy nạp (1) và $3(k^2 + 3k + 3) \vdots 3$. Ta có $A_{k+1} \vdots 3$.

Vậy (2) đúng, từ đó $\Rightarrow$ (đpcm).

b) Đặt $B_n = 4^n + 15n - 1$

Khi $n = 1$ ta có $B_1 = 18 \vdots 9$

Giả sử $n = k \geq 1$ ta có $B_k = (4^k + 15k - 1) \vdots 9$ (1)

Ta phải chứng minh $B_{k+1} \vdots 9$ (2)

Thật vậy, ta có: $B_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4.4^k + 15k + 14$ (3)

Từ (1) ta có $4^k + 15k - 1 = 9l\ (l \in N^*) \Leftrightarrow 4^k = 9l - 15k + 1$

Thế vào (3) ta có:

$B_{k+1} = 4(9l - 15k + 1) + 15k + 14 = (36l - 45k + 18) \vdots 9$

Vậy (2) đúng, từ đó $\Rightarrow$ (đpcm).

c) Đặt $C_n = n^3 + 11n$

Khi $n = 1$ ta có $C_1 = 12 \vdots 6$

Giả sử $n = k \geq 1$ ta có $C_k = (k^3 + 11k) \vdots 6$ (1)

Ta phải chứng minh $C_{k+1} \vdots 6$ (2)

Thật vậy, ta có: $C_{k+1} = (k+1)^3 + 11(k+1) = (k^3 + 11k) + (3k^2 + 3k + 12)$

$= [C_k + 3k(k+1) + 12] \vdots 6$ (do $k(k+1) \vdots 2$)

Vậy (2) đúng, từ đó $\Rightarrow$ (đpcm).

Bài 3: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có các bất đẳng thức sau:

a) $3^n > 3n + 1$; b) $2^{n+1} > 2n + 3$.

Giải

a) Khi $n = 2$ bất đẳng thức đã cho đúng.

Giả sử bất đẳng thức luôn đúng đến $n = k \geq 2$, tức là $3^k > 3k + 1$ (1).

Ta phải chứng minh đẳng thức luôn đúng đến $n = k + 1$, tức là:

$3^{k+1} > 3k + 4$ (2).

Thật vậy, ta có:

$3^{k+1} = 3.\,3^k > 3(3k + 1) = 9k + 3 = (3k + 4) + (6k - 1) > 3k + 4$ (do (1)).

$\Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ (đpcm).

b) Khi $n = 2$ bất đẳng thức đã cho luôn đúng.

Giả sử bất đẳng thức luôn đúng đến $n = k \geq 2$, tức là $2^{k+1} > 2k + 3$ (1).

Ta phải chứng minh đẳng thức đúng đến $n = k + 1$, tức là:

$2^{k+2} > 2k + 5$ (2).

Thật vậy, ta có:

$2^{k+2} = 2.\ 2^{k+1} > 2(2k + 3) = 4k + 6 = (2k + 5) + (2k + 1) > 2k + 5$ (do (1)).

Vậy (2) đúng $\Rightarrow$ (đpcm).

Bài 4: Cho tổng $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Tính tổng S_1, S_2, S_3;

b) Dự đoán công thức tính tổng và chứng minh bằng quy nạp.

Giải

a) • Ta có: $S_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$

• $S_2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} = \frac{2}{3}$

• $S_3 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} = \frac{3}{4}$

b) Từ a) ta dự đoán được $S_n = \frac{1}{n(n+1)}\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1).

Ta chứng minh công thức (1) đúng bằng phương pháp quy nạp.

Theo a) ta thấy (1) đúng khi $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.

Giả sử (1) đúng đến $n = k \geq 1$, tức là: $S_k = \frac{k}{k+1}$ (2)

Ta chứng minh (1) đúng đến $n = k + 1$, tức là: $S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$ (3)

Thật vậy ta có:

$$S_{k+1} = \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)}\right] + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

$\Rightarrow$ (3) đúng $\Rightarrow$ (đpcm).

Bài 5: Chứng minh rằng số đường chéo của một đa giác lồi n cạnh là: $\frac{n(n-3)}{2}$.

Giải

Cách 1: Ta chứng minh bài toán trên bằng phương pháp quy nạp.

Dễ kiểm tra được bài toán trên đúng khi $n = 4$. Giả sử bài toán đúng đến $n = k \geq 4$, tức là đa giác lồi k cạnh có số đường chéo là $\frac{k(k-3)}{2}$.

Ta phải chứng minh bài toán đúng đến $n = k + 1$, tức là đa giác lồi $k + 1$ cạnh có $\frac{(k+1)(k-2)}{2}$ đường chéo.

Thật vậy đa giác lồi $k + 1$ cạnh có số đường chéo bằng số đường chéo của đa giác lồi k cạnh cộng với $k - 1$ đường chéo.

Như vậy theo giả thiết quy nạp ta có số đường chéo của đa giác lồi $k + 1$ cạnh là: $\frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{k^2 - k - 2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$.

Từ đó $\Rightarrow$ (đpcm).

Cách 2: Đa giác lồi có số đường chéo là: $C_n^2 - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

III. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1: Cho $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$.Khẳng định nào sau đây sai.

(A) $S_1 = \frac{1}{2}$; (B) $S_2 = \frac{1}{6}$; (C) $S_2 = \frac{2}{3}$; (D) $S_{1000} = \frac{1000}{1001}$.

Câu 2: Tổng của $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + ... - 2n + 2n + 1$ $(n \in N^*)$

(A) $S_n = n$; (B)) $S_n = n - 1$; (C)) $S_n = n^2 + 1$; (D)) $S_n = 2n + 1$.

Câu 3: Tổng của $S_n = 2 + 4 + 6 + ... + 2n$ $(n \in N^*)$ là:

(A) $S_n = n^2$; (B) $S_n = (n+1)^2$; (C) $S_n = n^2 + 2$; (D) $S_n = n(n+1)$.

Câu 4: Biểu thức nào sau đây chia hết cho 6 $\forall n \in N$.

(A) $A_n = 6^n - 1$; (B) $B_n = 7^n + 1$; (C) $C_n = 13^n - 1$; (D) $D_n = 5^n + 1$.

Câu 5: Số dư của phép chia 101^{10} cho 11 là:

(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) 4.

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đán án	(B)	(C)	(D)	(C)	(A)

§2. DÃY SỐ

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa dãy số: Mỗi hàm số u xác định trên tập số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu:

$$\begin{aligned} U : \mathbb{N}^* &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto U(n) \end{aligned}$$

2. Định nghĩa dãy số hữu hạn: Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1, 2, ..., m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn.

3. Cách cho một dãy số: có ba cách cho một dãy số đó là:

a) Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát.

b) Dãy số cho bằng phương pháp mô tả.

c) Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi.

4. Dãy số tăng, dãy số giảm và dãy số bị chặn:

a) Dãy số tăng, dãy số giảm:

Dãy số (U_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $U_{n+1} > U_n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (U_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $U_{n+1} < U_n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Dãy số bị chặn:

Dãy số (U_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho

$$U_n \le M, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Dãy số (U_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho

$$U_n \ge m, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Dãy số (U_n) được gọi là bị chặn nếu $\exists$ m, M sao cho:

$$m \le U_n \le M, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

II. Bài tập căn bản

Bài 1: Viết năm số hạng đầu của các dãy số có số hạng tổng quát U_n cho bởi công thức:

a) $U_n = \dfrac{n}{2^n - 1}$; b) $U_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}$;

c) $U_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$; d) $U_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$.

Giải

a) $U_1 = 1$; $U_2 = \dfrac{2}{2^2 - 1} = \dfrac{2}{3}$; $U_3 = \dfrac{3}{2^3 - 1} = \dfrac{3}{7}$; $U_4 = \dfrac{4}{2^4 - 1} = \dfrac{4}{15}$;

$U_5 = \dfrac{5}{2^5 - 1} = \dfrac{5}{31}$.

b) $U_1 = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$; $U_2 = \dfrac{2^2 - 1}{2^2 + 1} = \dfrac{3}{5}$; $U_3 = \dfrac{2^3 - 1}{2^3 + 1} = \dfrac{7}{9}$;

$U_4 = \dfrac{2^4 - 1}{2^4 + 1} = \dfrac{15}{17}$; $U_5 = \dfrac{2^5 - 1}{2^5 + 1} = \dfrac{31}{33}$.

c) $U_1 = (1+1)^1 = 2$; $U_2 = \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$; $U_3 = \left(1 + \dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{64}{27}$;

$U_4 = \left(1 + \dfrac{1}{4}\right)^4 = \dfrac{625}{256}$; $U_5 = \left(1 + \dfrac{1}{5}\right)^5 = \dfrac{7776}{3125}$.

d) $U_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $U_2 = \dfrac{2}{\sqrt{2^2 + 1}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$; $U_3 = \dfrac{3}{\sqrt{2^3 + 1}} = 1$;

$U_4 = \dfrac{4}{\sqrt{2^4 + 1}} = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$; $U_5 = \dfrac{5}{\sqrt{2^5 + 1}} = \dfrac{5}{\sqrt{33}}$.

Bài 2: Cho dãy số (U_n), biết $U_1 = -1$, $U_{n+1} = U_n + 3$ với $n \geq 1$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.

b) Chứng minh bằng phương pháp quy nạp: $U_n = 3n - 4$.

Giải

a) $U_1 = -1$; $U_2 = U_1 + 3 = (-1) + 3 = 2$; $U_3 = U_2 + 3 = 5$;

$U_4 = U_3 + 3 = 8$; $U_5 = U_4 + 3 = 11$.

b) Khi $n = 1$ ta có $U_1 = -1 \Rightarrow$ công thức đã cho đúng.

Giả sử $U_n = 3n - 4$ (1) đúng đến $n = k \geq 1$, tức là $U_k = 3k - 4$ (2)

Ta phải chứng minh (1) đúng đến $n = k + 1$, tức là: $U_{k+1} = 3k - 1$ (3).

Thật vậy từ (2) và giả thiết ta có

$U_{k+1} = U_k + 3 = (3k - 4) + 3 = 3k - 1$

$\Rightarrow$ (3) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 3: Dãy số (U_n) cho bởi: $U_1 = 3$, $U_{n+1} = \sqrt{1 + U_n^2}$, $n \geq 1$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số;

b) Dự đoán công thức số hạng tổng quát U_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Giải

a) $U_1 = 3; U_2 = \sqrt{1+3^2} = \sqrt{10}; U_3 = \sqrt{1+10} = \sqrt{11};$
$U_4 = \sqrt{1+11} = \sqrt{12}; U_5 = \sqrt{1+12} = \sqrt{13}.$

b) Ta chứng minh bằng quy nạp $U_n = \sqrt{n+8}$ (1)

Theo a) ta thấy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$, tức là: $U_k = \sqrt{k+8}$ (2).

Ta chứng minh (1) đúng đến $n = k + 1$, tức là $U_{k+1} = \sqrt{k+9}$ (3).

Thật vậy từ (2) và giả thiết ta có:

$$U_{k+1} = \sqrt{1+U_k^2} = \sqrt{1+\left(\sqrt{k+8}\right)^2} = \sqrt{k+9}$$

$\Rightarrow$ (3) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 4: Xét tính tăng giảm của các dãy số sau:

a) $U_n = \dfrac{1}{n} - 2$; b) $U_n = \dfrac{n-1}{n+1}$.

c) $U_n = (-1)^n(2^n + 1)$; d) $U_n = \dfrac{2n+1}{5n+2}$.

Giải

a) Ta có $U_{n+1} - U_n = \left(\dfrac{1}{n+1} - 2\right) - \left(\dfrac{1}{n} - 2\right) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-(n+1)}{n(n+1)}$

$$= -\frac{1}{n(n+1)} < 0 \Leftrightarrow U_{n+1} < U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow$ dãy số đã cho giảm.

b) Ta có

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{n(n+1)-(n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+n-(n^2+n-2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0 \Leftrightarrow U_{n+1} > U_n$$

$\Rightarrow$ dãy số đã cho tăng.

c) Khi $n = 2k, k \geq 1$ thì $U_n = U_{2k} = 2^{2k} + 1$ (1)

Khi $n = 2k + 1, k \geq 0$ thì $U_n = U_{2k+1} = -(2^{2k+1} + 1)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ dãy số đã cho không tăng và không giảm (dãy đan dấu).

d) $U_{n+1} - U_n = \dfrac{2n+3}{5n+7} - \dfrac{2n+1}{5n+2} = \dfrac{(2n+3)(5n+2)-(2n+1)(5n+7)}{(5n+7)(5n+2)}$

$$= \frac{10n^2 + 19n + 6 - (10n^2 + 19n + 7)}{(5n+7)(5n+2)} = -\frac{1}{(5n+7)(5n+2)} < 0$$

$\Leftrightarrow U_{n+1} < U_n \Rightarrow$ dãy số đã cho giảm.

Bài 5: Trong các dãy số (U_n) sau, dãy số nào bị chặn dưới, bị chặn trên và bị chặn.

a) $U_n = 2n^2 - 1$; b) $U_n = \frac{1}{n(n+2)}$;

c) $U_n = \frac{1}{2n^2 - 1}$; d) $U_n = \sin u + \cos u$.

Giải

a) Ta có $U_n = 2n^2 - 1 \geq 1 \Rightarrow (U_n)$ bị chặn dưới (không bị chặn trên).

b) Ta có $U_n = \frac{1}{n(n+2)} \leq \frac{1}{3}$ và $U_n = \frac{1}{n(n+2)} > 0$

Như vậy $0 < U_n \leq \frac{1}{3} \Rightarrow (U_n)$ bị chặn.

c) Ta có $U_n = \frac{1}{2n^2 - 1} \leq 1$ và $U_n = \frac{1}{2n^2 - 1} > 0$

Như vậy $0 < U_n \leq 1 \Rightarrow (U_n)$ bị chặn.

d) Ta có $-\sqrt{2} \leq \sin u + \cos u \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq U_n \leq \sqrt{2} \Rightarrow (U_n)$ bị chặn.

III. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1: Cho dãy số (U_n) biết $U_n = \frac{2n^2 + n + 1}{1 - 3n + n^2}$. Số hạng thứ 7 của dãy là:

(A) $U_6 = \frac{79}{19}$; (B) $U_7 = \frac{106}{29}$; (C) $U_7 = \frac{104}{28}$; (D) $U_7 = \frac{206}{31}$.

Câu 2: Cho dãy số (U_n) biết $U_1 = 1$, $U_{n+1} = \frac{U_n + 2}{2}$, giá trị của U_5 là:

(A) 7 ; (B) $\frac{28}{13}$; (C) $\frac{29}{14}$; (D) $\frac{31}{16}$.

Câu 3: Dãy số (U_n) nào sau đây giảm:

(A) $U_n = n + 1$; (B) $U_n = n - 1$;

(C) $U_n = \frac{n+1}{2n-1}$; (D) $U_n = \frac{n^3}{2n^2 - 1}$.

Câu 4: Dãy số (U_n) nào sau đây không tăng , không giảm:

(A) $U_n = n^2$; (B) $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$;

(C) $U_n = (-1)^{2n}\dfrac{2n+1}{2n-1}$; (D) $U_n = (-1)^{n+1}(n^2+2n)$.

Câu 5: Dãy số (U_n) nào sau đây bị chặn:

(A) $U_n = n^2 - 2n + 1$; (B) $U_n = -n^2 + 2n + 3$;

(C) $U_n = \dfrac{n^2+3n}{n^2+3n+10}$; (D) $U_n = n\sin\dfrac{1}{n}$.

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(B)	(D)	(C)	(D)	(C)

§3. CẤP SỐ CỘNG

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa: Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d.

Nếu (U_n) là cấp số cộng với công sai d, ta có đẳng thức:

$U_{n+1} = U_n + d$ với $n \in \mathbb{N}^*$

2. Số hạng tổng quát:

Nếu cấp số cộng (U_n) có số hạng đầu là U_1 và công sai d thì số hạng tổng quát U_n được xác định bởi công thức: $U_n = U_1 + (U - 1)d$ với $n \geq 2$.

3. Tính chất:

Trong mỗi cấp số cộng ta có: $U_k = \dfrac{U_{k-1} + U_{k+1}}{2}$ với $k \geq 2$.

4. Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng:

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n = = \frac{n(U_1 + U_n)}{2} = nU_1 + \frac{n(n-1)d}{2}.$$

II. Bài tập căn bản

Bài 1: Trong các dãy số (U_n) sau đây, dãy số nào là cấp số cộng? Tính số hạng đầu và công sai của nó.

a) $U_n = 5 - 2n$; b) $U_n = \dfrac{n}{2} - 1$;

c) $U_n = 3^n$; d) $U_n = \dfrac{7-3n}{2}$.

Giải

a) Ta có $U_{n+1} - U_n = 5 - 2(n+1) - (5 - 2n) = -2 \Leftrightarrow U_{n+1} = U_n + (-2)$.

$\Rightarrow (U_n)$ là cấp số cộng với $U_1 = 3$ và $d = -2$.

b) Ta có $U_{n+1} - U_n = \left(\dfrac{n+1}{2} - 1\right) - \left(\dfrac{n}{2} - 1\right) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow U_{n+1} = U_n + \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow (U_n)$ là cấp số cộng với $U_1 = -\dfrac{1}{2}$ và $d = \dfrac{1}{2}$.

c) (U_n) không phải là một cấp số cộng.

d) Ta có $U_{n+1} - U_n = \dfrac{7-(3n+3)}{2} - \dfrac{7-3n}{2} = -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow U_{n+1} = U_n + \left(-\dfrac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow (U_n)$ là cấp số cộng với $U_1 = 2$ và $d = -\dfrac{3}{2}$.

Bài 2: Tìm số hạng đầu và công sai của các cấp số cộng sau:

a) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 . u_7 = 75 \end{cases}$.

Giải

a) Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} u_1 - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 10 \\ u_1 + (u_1 + 5d) = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 16 \\ d = -3 \end{cases}.$$

b) Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} u_1 + 6d - (u_1 + 2d) = 8 \\ (u_1 + d).(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4d = 8 \\ (u_1 + d).(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ (u_1 + 2)(u_1 + 12) - 75 = \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ u_1^2 + 14u_1 - 51 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ \left[\begin{array}{l} u_1 = 3 \\ u_1 = -17 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Như vậy có hai cặp thỏa mãn là $\begin{cases} d = 2 \\ u_1 = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} d = 2 \\ u_1 = -17 \end{cases}$.

Bài 3: Trong các bài toán về cấp số cộng, ta thường gặp năm đại lượng u_1, d, n, u_n, S_n.

a) Hãy viết các hệ thức liên hệ giữa các đại lượng đó. Cần phải biết ít nhất mấy đại lượng để có thể tìm ra các đại lượng còn lại?

b) Lập bảng theo mẫu sau và điền số thích hợp vào ô trống.

u_1	d	u_n	n	S_n
–2		55	20	
	–4		15	120
3	$\frac{4}{27}$	7		
		17	12	72
2	–5			–205

Giải

a) Các hệ thức liên hệ giữa các đại lượng u_1, d, n, u_n, S_n:

$U_n = u_1 + (n - 1)d$ với $n \geq 2$.

$$S_n = \frac{n(n_1 + u_n)}{2} = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

Phải biết ít nhất ba đại lượng trong năm đại lượng nói trên để tính được các đại lượng còn lại.

b)

u_1	d	u_n	n	S_n
–2	3	55	20	530
36	–4	–20	15	120
3	$\frac{4}{27}$	7	28	140
–5	2	17	12	72
2	–5	–43	10	–205

Bài 4: Mặt sàn tầng một của một ngôi nhà cao hơn mặt sân 0,5m, cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 21 bậc, mỗi bậc cao 18cm.

a) Viết công thức để tìm độ cao của một bậc tuỳ ý so với mặt sân.

b) Tính độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân.

Giải

a) Gọi u_n là độ cao của bậc thang thứ n ($1 \leq n \leq 21$) so với mặt sân thì theo bài ra ta có: $U_n = 50 + 18n = 18n + 50$ (đơn vị cm)

b) Độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân là: $U_{21} = 18.21 + 50$

$= 428$ (cm) $= 4,28$ (m).

Bài 5: Từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, đồng hồ đánh bao nhiêu tiếng, nếu nó chỉ đánh chuông báo giờ và số tiếng chuông bằng số giờ.

Giải

Gọi S là tổng số tiếng chuông mà đồng hồ đánh từ 0 giờ đến 12 giờ thì ta có: $S = 1 + 2 + \dots\dots + 12 = \frac{12(1+12)}{2} = 78$ (tiếng).

III. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1: Trong các dãy số U_n sau đây, dãy số nào là cấp số cộng:

(A) $U_n = (-1)^n.n^2$; (B) $U_n = \frac{1}{2^n}$;

(C) $U_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$; (D) $U_n = 1 - 4n$.

Câu 2: Công sai của cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$ và số hạng cuối $u_{15} = 43$ là:

(A) $d = -3$; (B) $d = 3$; (C) $d = -4$; (D) $d = 4$.

Câu 3: Tổng của 20 số hạng đầu của cấp số cộng (U_n) biết $U_1 = 5$ và $U_{20} = 50$ là:

(A) 550 ; (B) 275 ; (C) 625 ; (D) 370.

Câu 4: Bốn số nguyên lập thành một cấp số cộng, tổng của chúng bằng 20 và tổng nghịch đảo của chúng bằng $\frac{25}{24}$. Số hạng đầu của cấp số cộng đó là:

(A) $u_1 = 1$; (B) $u_1 = 2$; (C) $u_1 = 3$; (D) $u_1 = 4$.

Câu 5: Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số: $y = x^3 - (2m+1)x^2 - 9x$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

(A) $m = -1$; (B) $m = 1$; (C) $m = \frac{1}{2}$; (D) $m = -\frac{1}{2}$.

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(D)	(B)	(A)	(B)	(D)

§4. CẤP SỐ NHÂN

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa:

Nếu (u_n) là một cấp số nhân với công bội q, ta có:

$u_{n+1} = u_n q$ với $n \in \mathbb{N}^*$

2. Số hạng tổng quát:

Nếu cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định như sau:

$u_n = u_1 q^{n-1}$ với $n \geq 2$.

3. Tính chất các số hạng của cấp số nhân:

$u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}$ với $k \geq 2$

$\left(\text{hay} \left|u_k\right| = \sqrt{u_{k-1}.u_{k+1}}\right)$.

4. Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

II. Bài tập căn bản

Bài 1. Chứng minh các dãy số $\left(\frac{3}{5}.2^n\right), \left(\frac{5}{2^n}\right), \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ là các cấp số nhân.

Giải

- Xét (u_n) với $u_n = \frac{3}{5}.2^n$, ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3}{5}.2^{n+1}}{\frac{3}{5}.2^n} = 2$

$\Leftrightarrow u_{n+1} = 2.u_n \Rightarrow (u_n)$ là cấp số nhân có $u_1 = \frac{6}{5}$ và $q = 2$.

- Xét (u_n) với $u_n = \frac{5}{2^n}$, ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5}{2^{n+1}}}{\frac{5}{2^n}} = \frac{5.2^n}{5.2^{n+1}} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}.u_n \Rightarrow (u_n)$ là cấp số nhân có $u_1 = \frac{5}{2}$ và $q = \frac{1}{2}$.

- Xét (u_n) với $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n} = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow u_{n+1} = -\frac{1}{2}.u_n$ => (u_n) là cấp số nhân có $u_1 = -1$ và $q = -\frac{1}{2}$.

Bài 2. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q.

a) Biết $u_1 = 2$, $u_6 = 486$. Tìm q.

b) Biết $q = \frac{2}{3}$, $u_4 = \frac{8}{21}$. Tìm u_1.

c) Biết $u_1 = 3$, q= –2. Hỏi số 192 là số hạng thứ mấy?

Giải

a) Theo bài ra ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_6 = 486 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_1.q^5 = 486 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q^5 = 243 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = 3 \end{cases}$. Vậy q = 3.

b) Theo bài ra ta có: $\begin{cases} q = \frac{2}{3} \\ u_4 = \frac{8}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{2}{3} \\ u_1.q^3 = \frac{8}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{2}{3} \\ u_1.\frac{8}{27} = \frac{8}{21} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{2}{3} \\ u_1 = \frac{27}{21} \end{cases}.$$

Vậy $u_1 = \frac{27}{21} = \frac{9}{7}$.

c) Theo bài ra ta có $192 = u_1.q^{n-1} \Rightarrow 192 = 3.(-2)^{n-1} \Rightarrow (-2)^{n-1} = 64$

$\Leftrightarrow (-2)^{n-1} = (-2)^6 \Rightarrow n = 7$. Vậy số 192 là số hạng thứ 7 của cấp số nhân.

Bài 3. Tìm các số hạng của cấp số nhân (u_n) có năm số hạng, biết:

a) $u_1 = 3$ và $u_5 = 27$.

b) $u_4 - u_2 = 25$ và $u_3 - u_1 = 50$.

Giải

a) Theo bài ra ta có: $\begin{cases} u_3 = 3 \\ u_5 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^2 = 3 & (1) \\ u_1.q^4 = 27 & (2) \end{cases}$

Lấy (1) chia cho (2) ta được $\frac{1}{q^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow q = \pm 3$

- Khi $q = -3 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{3}$ (do (1))

Vậy 5 số hạng của cấp số nhân là : $\frac{1}{3}$, −1 , 3 , −9 , 27.

- Khi $q = 3 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{3}$ (do (1))

Vậy 5 số hạng của cấp số nhân là : $\frac{1}{3}$, 1 , 3 , 9 , 27.

b) Theo bài ra ta có: $\begin{cases} u_4 - u_2 = 25 \\ u_3 - u_1 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^3 - u_1q = 25 \\ u_1q^2 - u_1 = 50 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(q^3 - q) = 25 & (1) \\ u_1(q^2 - 1) = 50 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) chia cho (2) ta được $\frac{q^3 - q}{q^2 - 1} = \frac{1}{2} (q \neq \pm 1) \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$.

Vậy 5 số hạng của cấp số nhân là : $-\frac{200}{3}, -\frac{100}{3}, -\frac{50}{3}, -\frac{25}{3}, -\frac{25}{6}$.

Bài 4 .Tìm cấp số nhân có sáu số hạng, biết rằng tổng của 5 số hạng đầu là 31 và tổng của 5 số hạng sau là 62.

Giải

Gọi cấp số nhân cần tìm là (u_n) có số hạng đầu là (u_1) và công bội là q. Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 31 \\ u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_6 - u_1 = 31 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 31 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^5 - u_1 = 31 \\ \frac{u_1(1 - q^5)}{1 - q} = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(q^5 - 1) = 31 \\ u_1(1 - q^5) = 31(1 - q) \end{cases} \quad (q \neq 1)$$

=> $-1 = 1 - q$ => $q = 2$ (thỏa mãn).

Từ đó => $u_1 = 1$. Vậy sáu số hạng của cấp số nhân cần tìm là: 1, 2 ,4, 8, 16, 32.

(Dễ kiểm tra được trường hợp q = 1 không thỏa mãn).

Bài 5. Tỉ lệ tăng dân số của Tỉnh X là 1, 4 %. Biết rằng số dân của tỉnh hiện nay là 1,8 triệu ngươi. Hỏi với mức tăng như vậy thì sau 5 năm , 10 năm dân số của tỉnh đó là bao nhiêu.

Giải

Sau năm thứ nhất số người tỉnh X là:

$u_2 = u_1q + u_1 = u_1(9+1)$ (Với $u_1 = 1,8; q = 0,0614$)

Sau năm thứ hai số người tỉnh X là :

$u_3 = u_2q + u_2 = u_2(1+q) = u_1(1+q)^2$.

……

Sau năm thứ $n (n \geq 2)$ số người tỉnh X là:

$u_n = u_{n-1}q + u_n = u_1(1+q)^{n-1}$ (1).

Áp dụng (1) ta có sau năm thứ 5 số người tỉnh X là:

$u_6 = u_1(1+q)^5 = 1,8.(1+0,014)^5 \approx 1,929578$ (triệu)

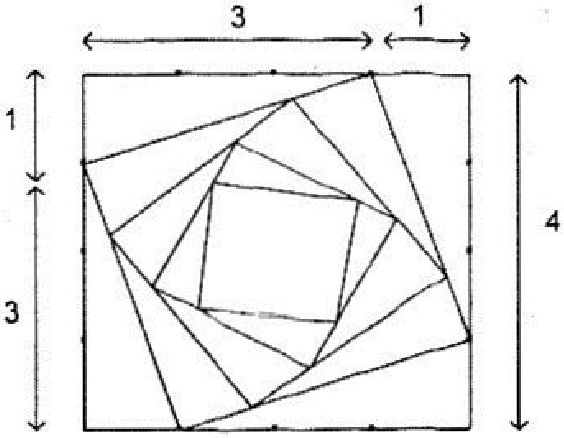
Sau năm thứ 10 số người tỉnh X là:

$u_{11} = u_1(1+q)^{10} = 1,8.(1+0,014)^{10} \approx 2,068483$ (triệu)

Bài 6. Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4. Người ta chia các cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2. Từ hình vuông C_2 lại tiếp như trên để được hình vuông C_3....Tiếp tục quá trình trên, ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, ..., C_n$.

Gọi a_n là độ dài các cạnh hình vuông C_n. Chứng minh rằng dãy số (a_n) là một cấp số nhân.

Giải



Hình vuông C_1 có cạnh $a_1 = 4$ .Từ đó ta tính được hình vuông C_2 có cạnh $a_2 = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$, hình vuông C_3 có cạnh $a_3 = \frac{5}{2}$, hình vuông C_4 có cạnh là $a_4 = \frac{5\sqrt{10}}{8}$....

Từ đó => (a_n) là cấp số nhân có $a_1 = 4$ và công bội $q = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

III. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 1. Công bội q của cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và số hạng cuối $u_{11} = 64$ là:

(A) $q = -1$; (B) $q = -\sqrt{2}$; (C) $q = 1$; (D) $q = \sqrt{2}$.

Câu 2. Cho cấp số nhân (u_n) biết $q = 2$ và $u_3 = 20$. Số hạng đầu của cấp số nhân là:

(A) $u_1 = 5$; (B) $u_1 = -5$; (C) $u_1 = -6$; (D) $u_1 = 6$.

Câu 3. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $u_1 - u_3 + u_5 = 65$ và $u_1 + u_7 = 325$

(A) $u_1 = 5, q = \pm 1$; (B) $u_1 = 4, q = \pm 2$;

(C) $u_1 = 5, q = \pm 2$; (D) $u_1 = 4, q = \pm 1$.

Câu 4. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 = 1$, $u_2 = 5$. Tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân là:

(A) $S_{10} = 2441406$; (B) $S_{10} = 2441460$;

(C) $S_{10} = 4241406$; (D) $S_{10} = 2444106$.

Câu 5. Giả sử x, y, z, t theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Khi đó giá trị của $A = (x-z)^2 + (y-z)^2 + (y-t)^2 - (x-t)^2$ bằng:

(A) 0 ; (B) 1 ; (C) –1 ; (D) 1 .

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(D)	(A)	(C)	(A)	(A)

ÔN TẬP CHƯƠNG III

I. Câu hỏi và bài tập tự luận

Bài 1. Khi nào thì cấp số cộng là dãy số tăng, dãy số giảm?

Trả lời

Từ công thức $u_{n+1} = u_n + d, u \in N^*$.

Như vậy ta có:

- Nếu $d > 0$ thì cấp số cộng (u_n) là một dãy số tăng.
- Nếu $d < 0$ thì cấp số cộng (u_n) là một dãy số giảm.

Bài 2. Cho cấp số nhân có $u_1 < 0$ và công bội q. Hỏi các số hạng khác sẽ mang dấu gì trong các trường hợp sau:

a) $q > 0$; b) $q < 0$.

Trả lời

a) $q > 0$ và $u_1 < 0$ ta có $u_n = u_1q^{n-1} < 0$ $(n \ge 2, u \in N^*)$

b) $q < 0$ và $u_1 < 0$ ta có $u_n > 0$ khi $n = 2k$ $(k \ge 1, k \in \mathbb{Z})$

và $u_n < 0$ khi $n = 2k + 1$ $(k \ge 0, k \in \mathbb{Z})$.

Bài 3. Cho hai cấp số cộng có cùng số các số hạng. Tổng các số hạng tương ứng của chúng có lập thành một cấp số cộng không ? Vì sao ? cho một ví dụ minh họa.

Trả lời.

Giả sử (a_n), (b_n) là hai cấp số cộng có cùng n ($n \ge 1$) số các số hạng và:

$a_n = a_1 + (n-1)d_1 (1)$ (d_1 là công sai của cấp số cộng (a_n))

$b_n = b_1 + (n-1)d_2 (2)$ (d_2 là công sai của cấp số cộng (b_n))

Từ (1) và (2) ta có:

$a_n + b_n = a_1 + b_1 + (n-1)(d_1 + d_2)$.

Đặt $c_n = a_n + b_n$, $c_1 = a_1 + b_1$ và $d = d_1 + d_2$ ta có:

$c_n = c_1 + (n-1)d$ => (c_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu là c_1 và công sai d.

Ví dụ: (a_n) là cấp số cộng có $a_1 = 1$ và $d_1 = 2$

(b_1) là cấp số cộng có $b_1 = 2$ và $d_2 = 2$

Khi đó (c_n) là cấp số cộng có $c_1 = 3$ và $d = 4$

Bài 5 .Chứng minh rằng với mọi $n \in N^*$, ta có:

a) $13^n - 1$ chia hết cho 6 ; b) $3n^3 + 15n$ chia hết cho 9.

Giải

a) Đặt $A_n = 13^n - 1$. Khi n = 1 ta có $A_1 = 12 \vdots 6$

Giả sử với $n = k \ge 1$ ta có $A_k = (13^k - 1) \vdots 6$ (giả thiết quy nạp)

Ta phải chứng minh $A_{k+1} = (13^{k+1} - 1) \vdots 6$

Thật vậy ta có $A_{k+1} = 13^{k+1} - 1 = 13.13^k - 1 = 13(6m + 1) - 1$

$= 78m + 12 = 6(13m + 2)$ với $(m \in N^*) \Rightarrow A_{k+1} \vdots 6$ => (đpcm).

b) Đặt $B_n = 3n^3 + 15n$. Khi n = 1 ta có $B_1 = 18 \vdots 9$.

Giả sử với $n = k \ge 1$ ta có $B_k = (3k^3 + 15k) \vdots 9$ (giả thiết quy nạp)

Ta phải chứng minh $B_{k+1} = \left[3(k+1)^3 + 15(k+1)\right] \vdots 9$.

Thật vậy ta có $B_{k+1} = 3(k+1)^3 + 15(k+1)$

$= 3(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 15k + 15 = (3k^3 + 15k) + 9(k^2 + k + 2)$

$= \left[B_k + 9(k^2 + k + 2)\right] \vdots 9$ => (đpcm).

Bài 6. Cho dãy số (u_n) , biết $u_1 = 2$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$ (với $n \geq 1$)

a) Viết năm số hạng đầu của dãy ;

b) Chứng minh $u_n = 2^{n-1} + 1$ bằng phương pháp quy nạp.

Giải

a) Ta có $u_1 = 2$; $u_2 = 2.u_1 - 1 = 3$; $u_3 = 2u_2 - 1 = 5$

$u_4 = 2u_3 - 1 = 9$; $u_5 = 2u_4 - 1 = 17$

b) Khi $n = 1$ ta có $u_1 = 2$ .Giả sử (1) đúng đến $n = k \geq 1$ tức là $u_k = u_k = 2^{k-1} + 1$. Ta phải chứng minh (1) đúng đến $u = k + 1$, tức là $u_{k+1} = 2^k + 1$.

Thật vậy ta có: $u_{k+1} = 2u_k - 1 = 2(2^{k-1} + 1) - 1 = 2^k + 1$ => (đpcm).

Bài 7. Xét tính tăng giảm và bị chặn của các dãy số (u_n) , biết :

a) $u_n = n + \dfrac{1}{n}$; b) $u_n = (-1)^{n-1}\sin\dfrac{1}{n}$;

c) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Giải

a) Ta có $u_{n+1} - u_n = \left(n + 1 + \dfrac{1}{n+1}\right) - \left(n + \dfrac{1}{n}\right) = 1 + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$

$= \dfrac{n^2 + n + n - n - 1}{n(n+1)} = \dfrac{n^2 + n - 1}{n(n+1)} > 0 \quad \forall n \in N^*$

=> u_n) là dãy tăng.

Ta có $u_n = n + \dfrac{1}{n} > 0$ => (u_n) bị chặn dưới, nhưng (u_n) không bị chặn trên

=> (u_n) không bị chặn.

b) Dãy (u_n) không tăng và không giảm.

Ta có $|u_n| = \left|\sin\dfrac{1}{n}\right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq u_n \leq 1, u \in N^*$

=> (u_n) bị chặn.

c) Ta có $u_{n+1} - u_n = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

$= \sqrt{n+2} + \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1}$ (1)

Ta chứng minh $\sqrt{n+2} + \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} < 0$ (2).

Thật vậy ta có (2) $\Leftrightarrow \sqrt{n+2} + \sqrt{n} < 2\sqrt{n+1}$

$$\Leftrightarrow n + 2 + 2\sqrt{n(n+2)} + n < 4(n+1)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+2)} < 2n + 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n(n+2)} < n + 1$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow 0 < 1 \text{ (đúng)}$$

=> (2) đúng.

Từ (1) , (2) $\Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0$

=> (u_n) là dãy số giảm.

Ta có $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

Từ đó => $0 < u_n \le \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ => (u_n) bị chặn.

Bài 8. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của các cấp số cộng (u_n), biết:

a) $\begin{cases} 5u_1 + 10u_n = 0 \\ s_4 = 14 \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$.

Giải

a) Theo bài ra ta có: $\begin{cases} 5u_1 + 10(u_1 + 4d) = 0 \\ 4u_1 + \dfrac{4.3.d}{2} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15u_1 + 40d = 0 \\ 4u_1 + 6d = 14 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ d = -3 \end{cases}.$$

b) Theo bài ra ta có

$$\begin{cases} u_1 + 6d + u_1 + 14d = 60 \\ (u_1 + 3d)^2 + (u_1 + 11d)^2 = 1170 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 10d = 30 \\ (u_1 + 3d)^2 + (u_1 + 11d)^2 = 1170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 30 - 10d \\ (30 - 10d + 3d)^2 + (30 - 10d + 11d)^2 = 1170 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 30 - 10d \\ (30 - 7d)^2 + (30 + d)^2 = 1170 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 30 - 10d \\ 50d^2 - 360d^2 + 630 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 30 - 10d \\ \left[\begin{array}{l} d = 3 \\ d = 4,2 \end{array}\right. \end{cases}$$

- Khi $d = 3 \Rightarrow u_1 = 0$
- Khi $d = 4,2 \Rightarrow u_1 = -12$.

Tóm lại có hai cặp thỏa mãn là: $\begin{cases} u_1 = 0 \\ d = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} u_1 = -12 \\ d = 4,2 \end{cases}$.

Bài 9. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của các cấp số nhân (u_n) ,biết:

a) $\begin{cases} u_6 = 192 \\ u_7 = 384 \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_4 = 10 \\ u_3 + u_6 - u_5 = 20 \end{cases}$.

Giải

a) Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} u_6 = 192 \\ u_7 = 384 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^5 = 192 & (1) \\ u_1.q^6 = 384 & (2) \end{cases}$$

Lấy (2) chia cho (1) ta có $q = 2 \Rightarrow u_1 = \dfrac{192}{32} = 6$.

b) Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(q^3 - q) = 72 & (1) \\ u_1(q^4 - q^2) = 144 & (2) \end{cases}$$

Lấy (2) chia cho (1) ta có $\dfrac{q^4 - q^2}{q^3 - q} = 2 \quad (q \neq 0, q \neq \pm 1) \Leftrightarrow \dfrac{q^2(q^2 - 1)}{q(q^2 - 1)} = 2$

$\Rightarrow q = 2$

$\Rightarrow u_1 = 12$.

c) Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} u_2 + u_5 - u_4 = 10 \\ u_3 + u_6 - u_5 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(q + q^4 - q^3) = 10 & (1) \\ u_1(q^2 + q^5 - q^4) = 20 & (2) \end{cases}$$

Lấy (2) chia cho (1) ta có: $\dfrac{q^2 + q^5 - q^4}{q + q^4 - q^3} = 2 \;(q \neq 0 \text{ và } 1 + q^3 - q^2 \neq 0)$

$$\Leftrightarrow \frac{q^2(1 + q^3 - q^2)}{q(1 + q^3 - q^2)} = 2 \Leftrightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = 1.$$

Bài 10. Tứ giác ABCD có số đo các góc lập thành một cấp số nhân theo thứ tự A, B, C, D. Biết rằng góc C gấp bốn lần góc A. Tính các góc của tứ giác.

Giải

Theo bài ra và tính chất của cấp số nhân ta có:

$$\begin{cases} C = 4A \\ B^2 = AC \\ C^2 = BD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 4A \\ B^2 = 4A^2 \\ (4A)^2 = (2A).D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 2A & (1) \\ C = 4A & (2) \\ D = 8A & (3) \end{cases}$$

Mặt khác ta có $A + B + C + D = 360^\circ$ (4).

Từ (1), (2) , (3), (4) => $A + 2A + 4A + 8A = 360^\circ \Leftrightarrow A = 24$

Vậy các góc của tứ giác có số đo là:

$A = 24^0$; $B = 48^0$; $C = 96^0$; $D = 192^0$.

Bài 11. Biết rằng ba số x, y ,z lập thành một cấp số nhân và ba số x, 2y, 3z lập thành một cấp số cộng. Tìm công bội của cấp số nhân.

Giải

Gọi q là công bội của cấp số nhân

- Nếu $x = 0$ thì do x, y , z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân nên $y = z = 0$ và khi đó ba số x, 2y, 3z hiển nhiên lập thành một cấp số cộng. Vậy trong trường hợp này q tuỳ ý.
- Nếu $x \neq 0$ thì theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} y^2 = xz \\ y = qx \\ 2y = \dfrac{x + 3z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = qx & (1) \\ z = \dfrac{4y - x}{3} & (2) \\ y^2 = xz & (3) \end{cases}$$

Thế (1), (2) vào (3) ta có:

$$(qx)^2 = x\left(\frac{4.9x - x}{3}\right) \Leftrightarrow 3q^2x^2 = x^2(4q - 1) \Leftrightarrow x^2(3q^2 - 4q + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3q^2 - 4q + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 1 \\ q = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Vậy công bội của cấp số nhân là $q = 1$, $q = \dfrac{1}{3}$

Bài 12. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích đế tháp. Biết diện tích đế tháp là $12288\ m^2$. Tính diện tích mặt trên cùng.

Giải

Gọi u_1 là diện tích bề mặt của đế tháp, u_2 là diện tích bề mặt của tầng thứ hai thì $u_2 = \frac{1}{2}u_1, \ldots, u_n$ là diện tích bề mặt của tầng thứ n thì

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.u_1.$$

Như vậy diện tích bề mặt của tầng trên cùng là :

$$u_{11} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}.1288 = 12(m^2).$$

Bài 13. Chứng minh rằng nếu các số a^2, b^2, c^2 lập thành một cấp số cộng thì các số $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Giải

Ta có: $\frac{2}{b+c} = \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow 2(c+a)(a+b) = (a+b)(b+c) + (c+a)(b+c)$

$\Leftrightarrow 2(ba + b^2 + ac + cb) = ca + cb + a^2 + ab + ab + ac + cb + c^2$

$\Leftrightarrow 2b^2 = a^2 + c^2 \Leftrightarrow b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2}$

Như vậy nếu a^2, b^2, c^2 lập thành một cấp số cộng thì $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

II. Bài tập trắc nghiệm

Bài 14. Cho dãy (u_n), biết $u_n = 3^n$. Hãy chọn phương án đúng

a) Số hạng u_{n+1} bằng:

(A) $3^n + 1$; (B) $3^n + 3$; (C) $3^n.3$; (D) $3(n+1)$.

b) Số hạng u_{2n} bằng:

(A) 2.3^n ; (B) 9^n ; (C) $3^n + 3$; (D) $6n$.

c) Số hạng u_{n-1} bằng:

(A) $3^n - 1$; (B) $\frac{1}{3}.3^n$; (C) $3^n - 3$; (D) $3n - 1$.

d) Số hạng u_{2n-1} bằng:

(A) $3^2.3^n - 1$; (B) $3^n.3^{n-1}$; (C) $3^{2n} - 1$; (D) 3^{2n-1}.

Giải

a) Số hạng $u_n = 3^{n+1} = 3^n.3 \Rightarrow$ (C) là đáp án đúng.

b) Số hạng $u_{2n} = 3^{2n} = (3^2)^n = 9^n \Rightarrow$ (B) là đáp án đúng.

c) Số hạng $u_{n-1} = 3^{n-1} = 3^n.3^{-1} = \frac{1}{3}.3^n \Rightarrow$(B) là đáp án đúng.

d) Số hạng $u_{2n-1} = 3^{2n-1} \Rightarrow$(D) là đáp án đúng.

Bài 15. Hãy cho biết dãy số (u_n) nào dưới đây là dãy số tăng, nếu biết công thức số hạng tổng quát u_n của nó là:

(A) $(-1)^{n+1}.\sin\frac{\pi}{2}$; (B) $(-1)^{2n}(5^n+1)$;

(C) $\frac{1}{\sqrt{n+1}+n}$; (D) $\frac{n}{n^2+1}$.

Giải

Ta có $u_n = (-1)^{2n}(5^n+1) = 5^n + 1$ ta dễ dàng chứng minh được dãy số này tăng. Dãy $u_n = (-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{n}$ không tăng, không giảm.

Dãy $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+n}$ và $\frac{n}{n^2+1}$ là hai dãy số giảm .

Như vậy đáp án đúng là (B) .

Bài 16. Cho cấp số cộng – 2 , x, 6, y. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau:

(A) x = –6 , y = –2 ; (B) x = 1 , y = 7 ;

(C) x = 2 , y = 8 ; (D) x = 2 , y = 10 .

Giải

Do –2, x, 6, y lập thành một cấp số cộng nên ta có:

$$\begin{cases} 2x = -2+6 \\ 12 = x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow \text{(D) là đáp án đúng.}$$

Bài 17. Cho cấp số nhân –4, x, y , –9 . Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau:

(A) x = 36 ; (B) x = – 6,5 ;

(C) x = 6 ; (D) x = –9 .

Giải

Do – 4, x, y, –9 là cấp số nhân nên ta có: $x = \sqrt{(-4).(-9)} \Leftrightarrow x = 6 \Rightarrow$(C) là đáp án đúng.

Bài 18. Cho cấp số cộng (u_n). Hãy chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

(A) $\frac{u_{10}+u_{20}}{2} = u_5 + u_{10}$; (B) $u_{90} + u_{210} = 2u_{150}$;

(C) $u_{10}.u_{30} = u_{20}$; (D) $\frac{u_{10}.u_{30}}{2} = u_{20}$

Giải

Áp dụng công thức: $\frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} = u_k$, ta thấy công thức $u_{90} + u_{210} = 2u_{150}$ là công thức đúng => (B) là đáp án đúng.

Bài 19. Trong các dãy số cho bởi công thức truy hồi sau, hãy chọn dãy số là cấp số nhân.

(A) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$; (B) $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$;

(C) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$; (D) $7, 77, 777, \ldots, \underbrace{77\ldots7}_{\text{n chữ số 7}}$.

Giải

Xét dãy số (u_n) thỏa: $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$

Ta có $u_1 = -1$, $u_2 = -3$, $u_3 = -9$, $u_4 = -27, \ldots.$

Như vậy (u_n) là cấp số nhân có $u_1 = -1$ và $q = 3$. Ta dễ kiểm tra được các dãy còn lại không phải là cấp số nhân. Vậy (B) là đáp án đúng.

CHƯƠNG IV. GIỚI HẠN

§1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

I. Tóm tắt lý thuyết

1.Định nghĩa 1.

Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Định nghĩa 2. Ta nói rằng dãy (v_n) có giới hạn là a khi $n \to +\infty$ nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - a) = 0$. Kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$ hay $v_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

2. Các tính chất về giới hạn của dãy số

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

* $\lim(u_n \pm v_n) = a \pm b$

* $\lim(u_n.v_n) = ab$

* $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$ (Nếu $b \neq 0$)

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim\sqrt{u_n} = \sqrt{a}$

3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.

$$S = u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{u_1}{1-q} \quad (|q| < 1)$$

4. Giới hạn tại vô cực

* Dãy số (u_n) có giới hạn khi $n \to +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

* Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $-\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu $\lim(-u_n) = +\infty$.

Kí hiệu $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

5. Tính chất của giới hạn tại vô cực

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$

b) Nếu $\lim u_n = a > 0, \lim v_n = 0$ với mọi n thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$

c) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $v_n = a > 0$ thì $\lim u_n v_n = +\infty$

II. Bài tập căn bản

Bài 1. Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là chu kì bán rã). Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n

a) Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n).

b) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.

c) Từ kết quả của câu b, chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người, cho biết chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6}g.

Giải

a) Sau chu kì thứ nhất khối lượng chất phóng xạ còn lại là

$u_1 = \frac{1}{2}$(kg)

Sau chu kì thứ hai khối lượng chất phóng xạ còn lại là $u_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

……………………………………………………………………………………

Sau chu kì thứ n khối lượng chất phóng xạ còn lại là $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Như vậy số hạng tổng quát của (u_n) là $u_n = \frac{1}{2^n}$

b) Xét (u_n) biết $u_n = \frac{1}{2^n}$. Ta thấy khi $n \to +\infty$ thì $2^n \to +\infty$ nên

$u_n = \frac{1}{2^n} \to 0$. Vậy $\lim u_n = 0$.

c) Để ý rằng $10^{-6}\text{g} = 10^{-6}.10^{-3}\text{kg} = \frac{1}{10^9}\text{kg}$.

Từ trên ta suy ra : $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10^9} \Leftrightarrow 2^n > 10^9 \Leftrightarrow n > 9$ thì chất phóng xạ không còn độc hại nữa.

Như vậy ta phải cần hơn 9.24000 = 216.000 (năm) thì 1kg chất phóng xạ trên không còn độc hại nữa.

Bài 2. Biết dãy số (u_n) thỏa mãn $|u_n - 1| < \frac{1}{n^3}$ với mọi n. Chứng minh rằng $\lim u_n = 1$

Giải

Ta có: $|u_n - 1| < \frac{1}{n^3} \Leftrightarrow -\frac{1}{n^3} < u_n - 1 < \frac{1}{n^3} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n^3} < u_n < 1 + \frac{1}{n^3}\ \forall n$.

Mặt khác ta có $\lim\left(1 - \frac{1}{n^3}\right) = \lim\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = 1 \Rightarrow \lim u_n = 1$

Bài 3 .Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{6n-1}{3n+2}$; b) $\lim \frac{3n^2+n-5}{2n^2+1}$;

c) $\lim \frac{3^n + 5.4^n}{4^n + 2^n}$; d) $\lim \frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n-2}$.

Giải

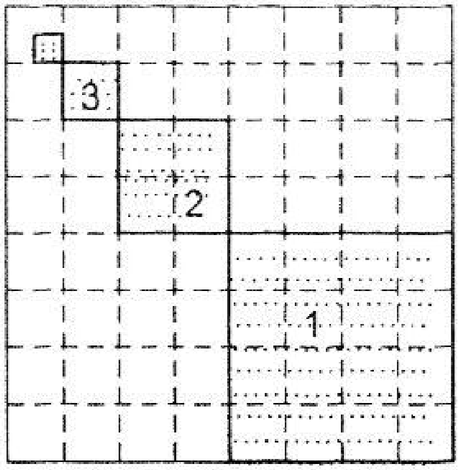
a) $\lim \frac{6n-1}{3n+2} = \lim \frac{6 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{6}{3} = 2.$

b) $\lim \frac{3n^2+n-5}{2n^2+1} = \lim \frac{3 + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{3}{2}.$

c) $\lim \frac{3^n + 5.4^n}{4^n + 2^n} = \lim \frac{\frac{3^n}{4^n} + 5}{1 + \frac{2^n}{4^n}} = \lim \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 5}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 5.$

d) $\lim \frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n-2} = \lim \frac{\sqrt{9 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{4 - \frac{2}{n}} = \frac{\sqrt{9}}{4} = \frac{3}{4}.$

Bài 4. Để trang hoàng cho một căn hộ của mình, chú chuột Micley quyết định tô màu một miếng bìa hình vuông cạnh bằng 1.Nó tô màu xám các hình vuông nhỏ được đánh số lần lượt là 1, 2, 3, ..., n trong đó cạnh của hình vuông kế tiếp bằng một nửa cạnh hình vuông trước đó.



Giả sử quy trình tô màu của Mickey có thể tiến ra vô hạn

a) Gọi u_n là diện tích của hình vuông màu xám thứ n. Tính u_1, u_2, u_3 và u_n.

b) Tính $\lim S_n$ với $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Giải

a) Do miếng bìa hình vuông đã cho có cạnh bằng 1 nên hình vuông màu xám thứ 1 có cạnh bằng $u_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Tương tự như trên ta có $u_2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^4, u_3 = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^6, u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.

b) Ta có $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

Từ đó $\Rightarrow \lim S_n = \lim\left[\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} - \left(\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$ $\left(q = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ và } u_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Bài 5. Tính tổng $S = -1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + ... + \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} + ...$

Giải

Ta thấy dãy: $-1, \frac{1}{10}, -\frac{1}{10^2}, ..., \frac{(-1)^n}{10^{n-1}}, ...$ là cấp số nhân vô hạn có $u_1 = -1$ và $q = -\frac{1}{10}$.

Từ đó suy ra : $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{-1}{1-\left(-\frac{1}{10}\right)} = \frac{-1}{1+\frac{1}{10}} = -\frac{10}{11}$.

Bài 6. Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn a = 1, 020202....(chu kì là 02). Hãy viết a dưới dạng một phân số.

Giải

Ta có: $a = 1 + \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^4} + ... + \frac{2}{10^{2n}} + ...$

$$= 1 + 2\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + ... + \frac{1}{10^{2n}} + ...\right) = 1 + 2\left(\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}}\right) = 1 + \frac{2}{99} = \frac{101}{99}.$$

Bài 7. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim(n^3 + 2n^2 - n + 1)$; b) $\lim(-n^2 + 5n - 2)$;

c) $\lim(\sqrt{n^2 - n} - n)$; d) $\lim(\sqrt{n^2 - n} + n)$.

Giải

a) $\lim(n^3 + 2n^2 - n + 1) = \lim n^3\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = +\infty$.

b) $\lim(-n^2 + 5n - 2) = \lim(-n^2)\left(1 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = -\infty$.

c) $\lim(\sqrt{n^2 - n} - n) = \lim\frac{n^2 - n - n^2}{\sqrt{n^2 - n} + n} = \lim\frac{-n}{\sqrt{n^2 - n} + n}$

$$= -\lim\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1} = -\frac{1}{2}.$$

d) $\lim(\sqrt{n^2 - n} + n) = \lim n\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1\right) = +\infty$.

Bài 8. Cho hai dãy (u_n) và (v_n). Biết $\lim u_n = 3$, $\lim v_n = +\infty$. Tính cá giới hạn sau:

a) $\lim\frac{3u_n - 1}{u_n + 1}$; b) $\lim\frac{v_n + 2}{v_n^2 - 1}$.

Giải

a) Ta có: $\lim\frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{\lim(3u_n - 1)}{\lim(u_n + 1)} = \frac{3\lim u_n - 1}{\lim u_n + 1} = \frac{8}{4} = 2$.

b) $\lim v_n = +\infty \Leftrightarrow v_n = +\infty$ khi $n \to +\infty$

Như vậy $\lim \frac{v_n + 2}{v_n^2 - 1} = \lim \frac{\frac{1}{v_n} + \frac{2}{v_n^2}}{1 - \frac{1}{v_n^2}} = 0$.

III. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. Khẳng định nào sau đây đúng:

(A) Nếu $\lim u_n = 0$ và $\lim v_n = +\infty$ thì $(\lim u_n . v_n) = 0$;

(B) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim \frac{v_n}{u_n} = 1$;

(C) Nếu $\lim u_n = 0$ thì $\lim \frac{1}{u_n} = \infty$;

(D) Nếu $\lim u_n = 0$ thì $\lim \frac{1}{u_n} = \pm\infty$.

Câu 2. Cho dãy (u_n) biết $u_n = \frac{n^2 + 2n + 3}{2n^2 + 1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng:

(A) $\lim u_n = +\infty$; (B) $\lim u_n = -\infty$;

(C) $\lim u_n = \frac{1}{2}$; (D) $\lim u_n = 3$.

Câu 3. Cho dãy (u_n) biết $u_n = \sqrt{n^2 + 3n} + 2n$. Mệnh đề nào sau đây đúng:

(A) $\lim u_n = 1$; (B) $\lim u_n = \frac{1}{3}$;

(C) $\lim u_n = -\infty$; (D) $\lim u_n = +\infty$.

Câu 4. Cho dãy (u_n) biết $u_n = \frac{4\sin n + 5\cos n}{n + 2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng:

(A) $\lim u_n = 0$; (B) $\lim u_n = 9$;

(C) $\lim u_n = \frac{1}{2}$; (D) $\lim u_n = +\infty$.

Câu 5. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}, \frac{1}{2 - \sqrt{2}}, \frac{1}{2}$.... là :

(A) $S = 4 + 2\sqrt{3}$; (B) $S = 4 + 3\sqrt{2}$;

(C) $S = 3 - 2\sqrt{3}$; (D) $S = \sqrt{3} + 4$.

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(C)	(C)	(D)	(A)	(B)

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa:

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$. Kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

2. Tính chất

a. Cho $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$. Khi đó

* $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$;

* $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$;

* $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = L.M$;

* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (Nếu $M \neq 0$).

b). Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

3. Giới hạn một bên: tính chất

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

II. Bài tập căn bản

Bài 1. Dùng định nghĩa, tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x+1}{3x-2}$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2-5x^2}{x^2+3}$.

Giải

a) Đặt $f(x) = \dfrac{x+1}{3x-2}$.

Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$

Giả sử (x_n) là một dãy bất kì, thỏa mãn $x_n \neq \frac{2}{3}$

và $x_n \to 4$ khi $n \to +\infty$

Ta có:

$\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n + 1}{3x_n - 2} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Vậy $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x+1}{3x-2} = \frac{1}{2}$.

b) Đặt $g(x) = \frac{2 - 5x^2}{x^2 + 3}$.

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Giả sử (x_n) là một dãy bất kì, thỏa mãn $x_n \to +\infty$

Ta có $\lim g(x_n) = \lim \frac{2 - 5(x_n)^2}{(x_n)^2 + 3} = \lim \frac{\frac{2}{(x_n)^2} - 5}{1 + \frac{3}{(x_n)^2}} = -5$

Vậy $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2 - 5x^2}{x^2 + 3} = -5$.

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & \text{nếu } x \geq 0 \\ 2x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

và các dãy (u_n) với $u_n = \frac{1}{n}$, (v_n) với $v_n = -\frac{1}{n}$.

Tính $\lim u_n$, $\lim v_n$, $\lim f(u_n)$ và $\lim f(v_n)$.

Giải

Ta có $\lim u_n = \lim \frac{1}{n} = 0$; $\lim v_n = \lim\left(-\frac{1}{n}\right) = -\lim \frac{1}{n} = 0$;

$\lim f(u_n) = \lim(\sqrt{u_n} + 1) = 1$ (do $u_n = \frac{1}{n} > 0$)

$\lim f(v_n) = \lim(2v_n) = 0$ (do $v_n = -\frac{1}{n} < 0$)

Bài 3. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$; b) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{4 - x^2}{x + 2}$; c) $\lim\limits_{x \to 6} \frac{\sqrt{x+3} - 3}{x - 6}$;

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x - 6}{4 - x}$; e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{17}{x^2 + 1}$; f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x^2 + x - 1}{3 + x}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\dfrac{8}{-2}=-4$.

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(2-x)(2+x)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(2-x)=4.$

c) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{(x+3)-9}{(x-6)(\sqrt{x+3}+3)}=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+3}=\dfrac{1}{6}.$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-6}{4-x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2-\dfrac{6}{x}}{\dfrac{4}{x}-1}=-2.$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{17}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\dfrac{17}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=0.$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-2x^2+x-1}{3+x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x}}=-\infty.$

Bài 4 . Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-5}{(x-2)^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-7}{x-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-7}{x-1}$.

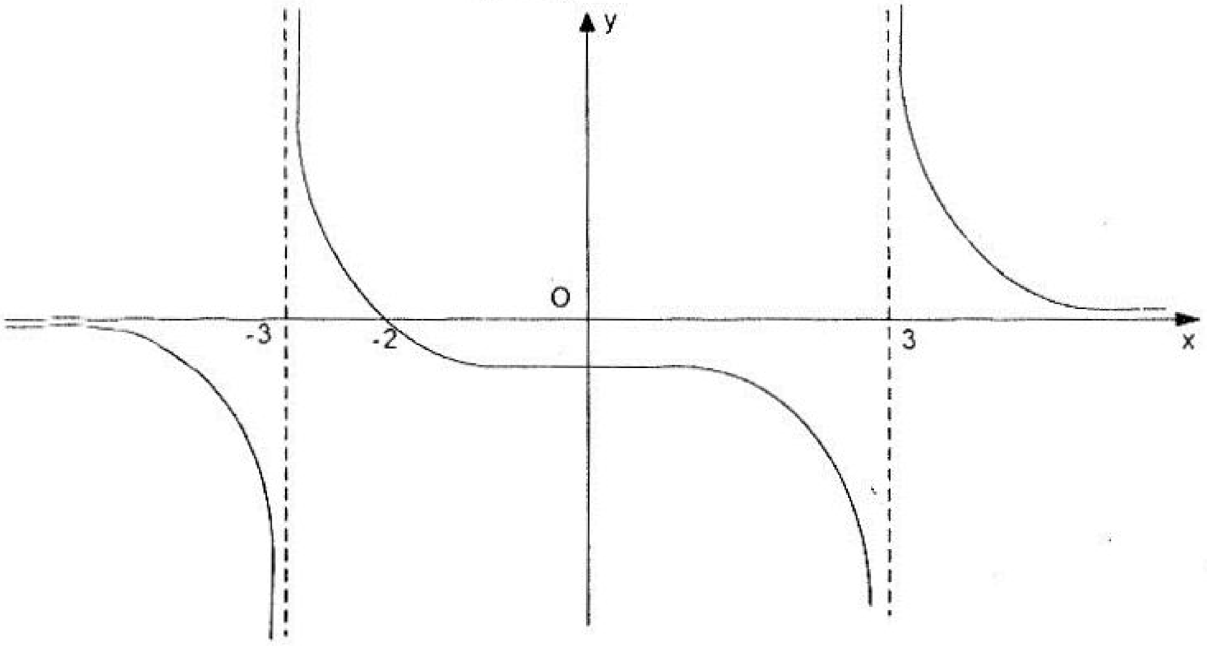
Giải

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-5}{(x-2)^2}=+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-7}{x-1}=+\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-7}{x-1}=-\infty$.

Bài 5. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-9}$ có đồ thị như hình dưới đây:



Quan sát trên đồ thị và nêu nhận xét về hàm số đã cho khi $x \to -\infty$, $x \to 3^-$ và $x \to 3^+$

b) Kiểm tra các nhận xét trên bằng cách tính các giới hạn sau:

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ với f(x) được xét trên khoảng $(-\infty; -3)$;

* $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ với f(x) được xét trên khoảng $(-3; 3)$;

* $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ với f(x) được xét trên khoảng $(-3; 3)$.

Giải

a) Nhìn vào đồ thị ta có:

* Khi $x \to -\infty$ thì $f(x) \to 0$.

* Khi $x \to 3^-$ thì $f(x) \to -\infty$.

* Khi $x \to -3^+$ thì $f(x) \to +\infty$.

b)

$$* \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+2}{x^2-9} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}}{1 - \dfrac{9}{x^2}} = 0$$

$$* \lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{x+2}{x^2-9} = +\infty$$

$$* \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{x+2}{x^2-9} = -\infty .$$

Bài 6. Tính:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4-x^2+x-1)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+3x^2-5)$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x+5}$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{5-2x}$.

Giải

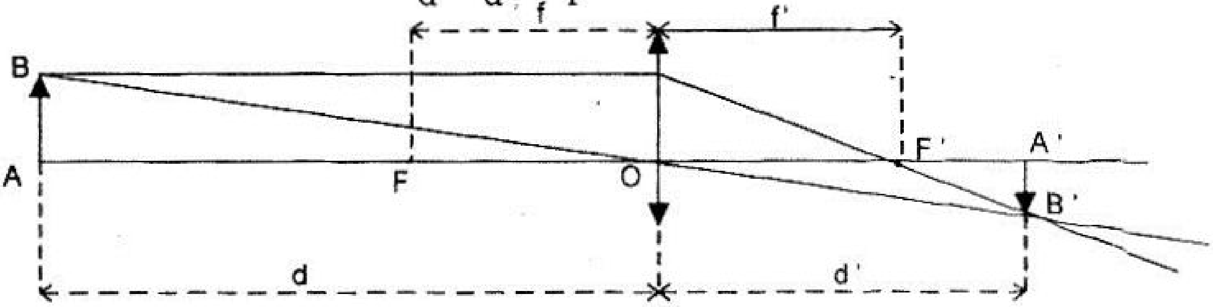
a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4-x^2+x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4\left(1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}\right)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+3x^2-5)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)\left(2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^3}\right)=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x+5}=\lim\limits_{x\to-\infty}|x|\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)\left(\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}\right)=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{5-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}{\dfrac{5}{x}-2}=-1$.

Bài 7. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự f. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và từ ảnh A'B' của nó tới quang tâm O của thấu kính. Công thức thấu kính $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d'}=\dfrac{1}{f}$



a) Tìm biểu thức xác định hàm số d' = f(d).

b) Tìm $\lim\limits_{d\to f^+}\varphi(d)$, $\lim\limits_{d\to f^-}\varphi(d)$ và $\lim\limits_{d\to+\infty}\varphi(d)$. Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.

Giải

a) Theo công thức thấu kính , ta có:

$$\frac{1}{d'}=\frac{1}{f}-\frac{1}{d}\Leftrightarrow\frac{1}{d'}=\frac{d-f}{f.d}\Rightarrow d'=\frac{f.d}{d-f}$$

Vậy hàm số cần tìm là $d'=\varphi(d)=\dfrac{fd}{d-f}$.

b) $\lim\limits_{d\to f^+}\varphi(d) = \lim\limits_{d\to f^+}\frac{fd}{d-f} = +\infty$, $\lim\limits_{d\to f^-}\varphi(d) = \lim\limits_{d\to f^-}\frac{fd}{d-f} = -\infty$

$\lim\limits_{d\to \infty}\varphi(d) = \lim\limits_{d\to \infty}\frac{fd}{d-f} = f$.

III. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^3 - x - 1}{x - 1}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ bằng:

(A) 5 ; (B) 4 ; (C) 3 ; (D) $\frac{5}{2}$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x + 3}}{2x - 2}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ bằng:

(A) $+\infty$; (B) 0 ; (C) $\frac{1}{4}$; (D) 1.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ bằng:

(A) -1 ; (B) $-\frac{2}{3}$; (C) -2 ; (D) -3.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \frac{(x-1)^2(7x+3)^2}{(2x+2)^4}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ bằng:

(A) $+\infty$; (B) $-\infty$; (C) $\frac{16}{49}$; (D) $\frac{49}{16}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ bằng:

(A) 0 ; (B) $-\infty$; (C) $+\infty$; (D) 1.

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(A)	(C)	(B)	(D)	(C)

§3 HÀM SỐ LIÊN TỤC

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Hàm số liên tục tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng

* Hàm số y = f(x) được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó

* Hàm số y = f(x) được gọi là liên tục trên $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng (a;b) và

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

3. Một số tính chất

a) Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng

c) Giả sử y = f(x) và y = g(x) là hai hàm số liên tục tại x_0. Khi đó:

* Các hàm số y = f(x) + g(x), y = f(x) – g(x) và y = f(x).g(x) liên tục tại x_0.

* Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

d) Nếu hàm số y = f(x) liên tục trên $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho f(c) = 0.

II. Bài tập căn bản

Bài 1. Dùng định nghĩa xét tính liên tục của hàm số

$f(x) = x^3 + 2x - 1$ tại $x_0 = 3$

Giải

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$ => tại $x_0 = 3$ hàm số xác định.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(x^3 + 2x - 1) = 32 = f(3)$

Vậy hàm số liên tục tại $x_0 = 3$.

Bài 2.

a) Xét tính liên tục của hàm số y = g(x) tại $x_0 = 2$, biết :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 5 & \text{nếu } x=2 \end{cases}$$

b) Trong biểu thức xác định g(x) ở trên ,cần thay đổi số 5 bằng số nào để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$.

Giải

a) Ta có g(2) = 5.

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4) = 12$$

Như vậy $\lim_{x\to 2} g(x) \neq g(2) \Rightarrow$ hàm số không liên tục tại $x_0 = 2$.

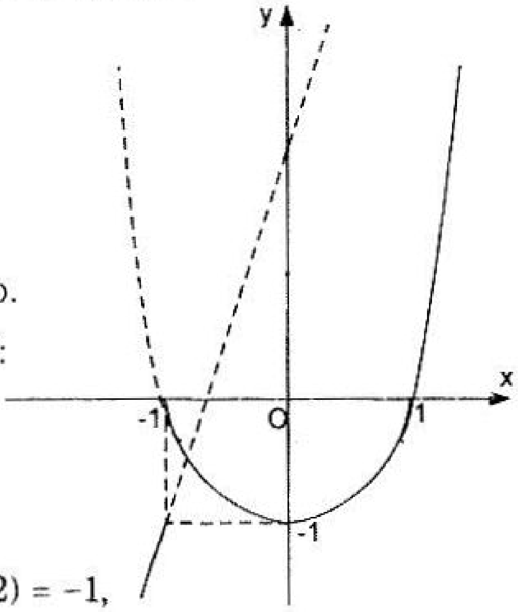
b) Để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$ thì ta phải thay 5 bởi 12.

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{nếu } x<-1 \\ x^2-1 & \text{nếu } x \geq -1 \end{cases}$

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ .Từ đó nêu nhận xét về tính liên tục của hàm số trên tập xác định của nó.

b) Khẳng định nhận xét trên bằng một chứng minh

Giải



a) Cách vẽ:

- Vẽ đồ thị $y = 3x + 2$ ứng với $x < -1$ và vẽ đồ thị $y = x^2 - 1$ ứng với $x \geq -1$, từ đó suy ra đồ thị hàm số đã cho.
- Nhận xét về tính liên tục của hàm số:

  Khi $x < -1$: hàm số liên tục .

  Khi $x > -1$: hàm số liên tục.

  Khi $x = -1$: hàm số không liên tục

b) Ta có $f(-1) = 0$, $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}(3x+2) = -1$,

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}(x^2-1) = 0$. Như vậy $\lim_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim_{x\to -1^+} f(x)$ nên hàm số không liên tục tại $x_0 = -1$.

Ngoài ra khi $x \neq 1$ thì hàm số đã cho là các hàm đa thức suy ra chúng liên tục.

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x-6}$ và $g(x) = \tan x + \sin x$. Với mỗi hàm số , hãy xác định các khoảng trên đó hàm số liên tục

Giải

- Hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x-6}$ xác định khi $x^2+x-6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -3 \end{cases}$

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-3;2\}$.

- Hàm số $g(x) = \tan x + \sin x$ xác định khi $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \left\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Bài 5. Ý kiến sau đúng hay sai?

" Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0 còn hàm số $y = g(x)$ không liên tục tại x_0, thì $y = f(x) + g(x)$ là một hàm số không liên tục tại x_0".

Giải

Nếu không tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ thì rõ ràng ta thấy $y = f(x) + g(x)$ không liên tục tại x_0.

Nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq g(x_0)$, thì khi đó ta có

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) \neq f(x_0) + g(x_0)$$

=> hàm số

$y = f(x) + g(x)$ không liên tục tại x_0.

Vậy ý kiến trên là đúng.

Bài 6. Chứng minh rằng phương trình

a) $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có ít nhất hai nghiệm ;

b) $\cos x = x$ có nghiệm.

Giải

Đặt $f(x) = 2x^3 - 6x + 1 = 0$, hàm số này liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(-2) = -3$, $f(1) = -3$, $f(0) = 1$. Từ đó ta có:

- $f(-2).f(0) = -3 < 0 \Rightarrow \exists$ ít nhất một số $x_1 \in (-2;0)$ sao cho $f(x_1) = 0$ hay phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2; 0)$.
- $f(0).f(1) = -3 < 0 \Rightarrow \exists$ ít nhất một số $x_2 \in (0;1)$ sao cho $f(x_2) = 0$ hay phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0; 1)$

Như vậy phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm

b) Đặt $g(x) = x - \cos x$, hàm số này liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g(0) = -1$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow g(0).g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$

=> phương trình $g(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

=> phương trình $\cos x = x$ có nghiệm.

III. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. Khẳng định nào sau đây đúng:

(A) Hàm số y = f(x) liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$;

(B) Hàm số y = f(x) liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$;

(C) Hàm số y = f(x) liên tục tại x_0 khi và chỉ khi tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

(D) Hàm số y = f(x) liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = 0$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 2mx+3 & \text{nếu } x=2 \end{cases}$

Với giá trị nào của m thì hàm số liên tục tại $x_0 = 2$

(A) $m = \frac{1}{4}$; (B) $m = -\frac{1}{4}$; (C) $m = \frac{1}{2}$; (D) $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 3. Với giá trị nào của a thì hàm số $f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{nếu } x \geq 1 \\ x^2+2x & \text{nếu } x<1 \end{cases}$

liên tục tại $x_0 = 1$.

(A) a =1 ; (B) a = 2 ; (C) a = 3 ; (D) a = 4.

Bài 4. Hàm số $y = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+3x-4}$ liên tục trên tập hợp nào sau đây:

(A) $(-\infty;1)$; (B) $(-4;4)$; (C) $\mathbb{R}\setminus\{-4,1\}$; (D) $\mathbb{R}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x}$ chưa xác định tại x = 0 . Có thể gán cho f(x) giá trị bằng bao nhiêu để hàm số f(x) trở thành liên tục tại x = 0

(A) f(0) = 0 ; (B) f(0) = 1 ; (C) f(0) = −1 ; (D) f(0) = −2 .

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(D)	(A)	(B)	(C)	(D)

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

I. Câu hỏi và bài tập tự luận

Bài 1.

Hãy lập bảng liệt kê, các giới hạn đặc biệt của dãy số và các giới hạn đặc biệt của hàm số.

Trả lời

- Bảng liệt kê các giới hạn đặc biệt của dãy số (u_n):

Dãy số (u_n)	Lim u_n
$u_n = \frac{1}{n}$	0
$u_n = \frac{1}{n^k}$	0
$u_n = q^n, \lvert q \rvert < 1$	0
$u_n = c$ (c hằng số)	c

- Bảng liệt kê các giới hạn đặc biệt của hàm số y = f(x):

Các giá trị của k	Giới hạn
k nguyên dương	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$
k là số lẻ	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = -\infty$
k là số chẵn	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = +\infty$

Bài 2. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n). Biết $\lvert u_n - 2 \rvert \le v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$. Có kết luận gì về giới hạn của dãy số u_n.

Trả lời

Ta có: $\lvert u_n - 2 \rvert \le v_n \Leftrightarrow -v_n \le u_n - 2 \le v_n$

$\Leftrightarrow 2 - v_n \le u_n \le v_u + 2$

Do $\lim v_n = 0 \Rightarrow \lim (2 - v_n) = \lim (2 + v_n) = 2$.

$\Rightarrow \lim u_n = 2$

Kết luận: dãy số (u_n) cũng có giới hạn là 2.

Bài 3. Tên của một học sinh được mã hóa bởi số 1530. Biết rằng mỗi chữ số trong số này là giá trị của một trong các biểu thức A, H, N, O với

$A = \lim \dfrac{3n-1}{n+2}$ $\qquad$ $H = \lim(\sqrt{n^2+2n} - n)$

$N = \lim \dfrac{\sqrt{n}-2}{3n+7}$ $\qquad$ $O = \lim \dfrac{3^n - 5.4^n}{1-4^n}$

Hãy cho biết tên của học sinh này, bằng cách thay các chữ số trên bởi các ký hiệu biểu thức tương ứng.

Trả lời

Ta có $A = \lim \dfrac{3n-1}{n+2} = \lim \dfrac{3-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{2}{n}} = 3$ (1)

$$H = \lim(\sqrt{n^2+2n} - n) = \lim \frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

$$= \lim \frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1} = 1 \ (2)$$

$$N = \lim \frac{\sqrt{n}-2}{3n+7} = \lim \frac{\sqrt{\dfrac{1}{n}}-\dfrac{2}{n}}{3+\dfrac{7}{n}} = 0 \ (3)$$

$$O = \lim \frac{3^n - 5.4^n}{1-4^n} = \lim \frac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n - 5}{\left(\dfrac{1}{4}\right)^n - 1} = 5 \ (4)$$

Từ (1) , (2), (3) , (4) và theo bài ra ta có tên của học sinh được mã hóa là HOAN.

Bài 4.

a) Có nhận xét gì về công bội của cấp số nhân lùi vô hạn?

b) Cho ví dụ về một cấp số nhân lùi vô hạn có công bội là một số âm và một cấp số nhân lùi vô hạn có công bội là số dương và tính tổng của mỗi cấp số nhân đó.

Trả lời

a) Gọi công bội của cấp số nhân lùi vô hạn là q thì $|q| < 1$.

b) Ví dụ

* Dãy số $\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},...,\frac{1}{3^n},...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn và có công bội $q=\frac{1}{3}$. và tổng của chúng là: $S=\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$.

* Dãy số : $1,-\frac{1}{4},\frac{1}{16},-\frac{1}{64},...,\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$,... là một cấp số nhân có công bội lùi vô hạn, có công bộ $q=-\frac{1}{4}$ và tổng của chúng: $S=\dfrac{1}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}$.

Bài 5. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x^2+x+4}$; b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+3x}$; c) $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{2x-5}{x-4}$;

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}(-x^3+x^2-2x+1)$; e) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+3}{3x-1}$; f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+4}-x}{3x-1}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x^2+x+4}=\dfrac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+3x}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)(x+2)}{x(x+3)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+2}{x}=\dfrac{1}{3}$.

c) $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{2x-5}{x-4}=-\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}(-x^3+x^2-2x+1)=-\infty$.

e) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+3}{3x-1}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1+\frac{3}{x}}{3-\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{3}$.

f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+4}-x}{3x-1}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-x}{3x-1}$

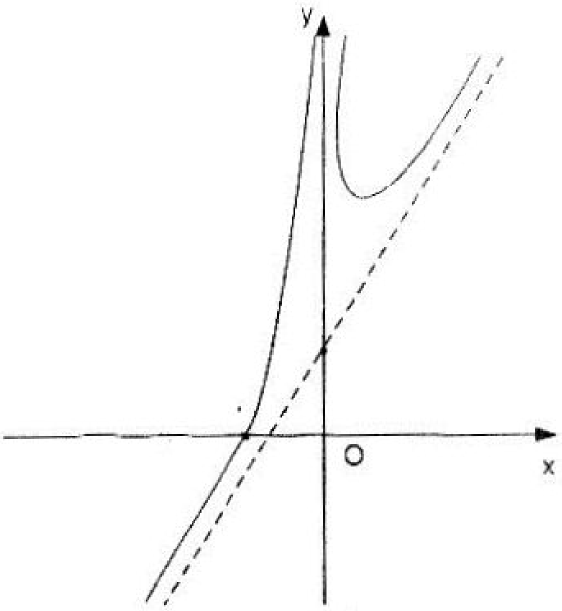
$$=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1\right)}{3x-1}=-\dfrac{2}{3}.$$

Bài 6. Cho hai hàm số $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2}$ và $g(x)=\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2}$

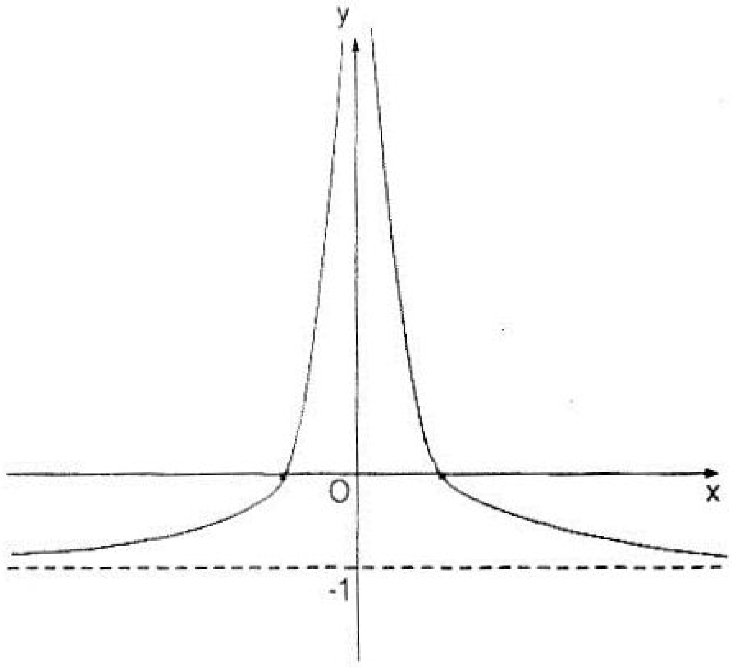
a) Tính $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

b) Hai đường cong sau đây là đồ thị của hai hàm số đã cho.

Từ kết quả của câu a), hãy xác định xem đường cong nào là đồ thị của mỗi hàm số đó.



a)



b)

Giải

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - x^2}{x^2} = +\infty$.

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - x^2}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{1} = -1.$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left(x + 1 + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty .$$

b) Từ a) và đồ thị hàm số đã cho ta có :

Hình a là đồ thị hàm số y = g(x) và hình b là đồ thị hàm số y = f(x).

Bài 7. Xét tính liên tục trên $\mathbb{R}$ của hàm số $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{nếu } x>2 \\ 5 - x & \text{nếu } x \leq 2 \end{cases}$

Giải

- Khi x > 2 hàm số liên tục.

- Khi $x < 2$ hàm số liên tục.
- Ta xét tính liên tục của hàm số tại $x = 2$

Ta có: $g(2) = 3$, $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{(x+1)(x-2)}{x-2}$

$= \lim\limits_{x \to 2^+} (x+1) = 3$ (1)

$\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (5 - x) = 3$ (2)

Từ (1), (2) => $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 3 = g(2)$ => hàm số liên tục tại $x = 2$.

Tóm lại hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 8. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm nằm trong khoảng $(-2; 5)$.

Giải

Đặt $f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$, hàm số liên tục trên $(-2; 5)$ ta có:

$f(-2) = -92$, $f(1) = 1$, $f(2) = -8$, $f(3) = 13$, từ đó suy ra $f(-2).f(1) < 0$, $f(1).f(2) < 0$, $f(2).f(3) < 0$

=> phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất ba nghiệm trên ba khoảng khác nhau $(-2; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$ => phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất ba nghiệm trong $(-2; 5)$.

II. Bài tập trắc nghiệm

Bài 9. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

(A) Một dãy số có giới hạn thì luôn luôn tăng hoặc luôn luôn giảm ;

(B) Nếu (u_n) là dãy số tăng thì $\lim u_n = +\infty$.

(C) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim(u_n - v_n) = 0$;

(D) Nếu $u_n = a^n$ và $-1 < a < 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Giải

Ta dễ thấy các khẳng định (A), (B), (C) sai và khẳng định (D) là đúng.

Bài 10. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1 + 2 + 3 + ... + n}{n^2 + 1}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

(A) $\lim u_n = 0$; (B) $\lim u_n = \frac{1}{2}$; (C) $\lim u_n = 1$;

(D) Dãy (u_n) không có giới hạn khi $n \to +\infty$.

Giải

Ta có: $u_n = \dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2+1} = \dfrac{n^2+n}{2(n^2+1)} \Rightarrow \lim u_n = \lim \dfrac{n^2+n}{2(n^2+1)} = \dfrac{1}{2}$.

=> (B) là đáp án đúng.

Bài 11. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + \ldots + (\sqrt{2})^n$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

(A) $\lim u_n = \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + \ldots + (\sqrt{2})^n + \ldots = \dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

(B) $\lim u_n = -\infty$

(C) $\lim u_n = +\infty$

(D) Dãy số (u_n) không có giới hạn khi $n \to +\infty$.

Giải

Dãy $\sqrt{2}, (\sqrt{2})^2, \ldots, (\sqrt{2})^n, \ldots$ là một cấp số nhân có công bội $q = \sqrt{2}$ và $u_1 = \sqrt{2}$ nên ta có

$$u_n = \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + \ldots + (\sqrt{2})^n = \frac{\sqrt{2}\left(1-(\sqrt{2})^n\right)}{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + \frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{\sqrt{2}-1}$$

$\Rightarrow \lim u_n = \lim\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + \dfrac{(\sqrt{2})^{n+1}}{\sqrt{2}-1}\right) = +\infty$ => (C) là đáp án đúng.

Bài 12. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-3x-1}{x-1}$ bằng :

(A) -1 ; (B) $-\infty$; (C) -3 ; (D) $+\infty$.

Giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-3x-1}{x-1} = +\infty$ => (D) là đáp án đúng.

Bài 13. Cho $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x}$. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ bằng:

(A) $+\infty$; (B) 1 ; (C) $-\infty$; (D) -1.

Giải

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{x} - x\right) = +\infty$ => (A) là đáp án đúng.

Bài 14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{nếu } x \neq 3 \\ m & \text{nếu } x = 3 \end{cases}$

Để hàm số liên tục tại x = 3 thì phải chọn m bằng bao nhiêu .

(A) 4 ; (B) -1 ; (C) 1 ; (D) -4.

Giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to3} f(x) = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}$

$= -\lim\limits_{x\to3}(\sqrt{x+1}+2) = -4 \Rightarrow m = -4$ thì hàm số liên tục tại x = 3 => đáp án đúng là (D).

Bài 15. Cho phương trình:

$$-4x^3 + 4x - 1 = 0$$

Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề sai?

(A) Hàm số $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$;

(B) Phương trình (1) không có nghiệm trên khoảng $(-\infty;1)$;

(C) Phương trình (1) có nghiệm trên khoảng $(-2;0)$;

(D) Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $\left(-3;\dfrac{1}{2}\right)$.

Giải

Đặt $f(x) = -4x^3 + 4x - 1$, hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có:

$f(-2) = 23;\ f(1) = -1 \Rightarrow f(-2)f(1) < 0$

=> $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2;\ 1)$

=> trên khoảng $(-\infty;1) \supset (-2;\ 1)$ phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm

=> (B) là phương án sai.

Ta dễ kiểm tra được các phương án còn lại đúng.

CHƯƠNG V. ĐẠO HÀM

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa: Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a; b) và $x_0 \in (a;b)$. Nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số y = f(x) tại điểm x_0 và ký hiệu là $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ được gọi là số gia của đối số tại x_0

Đại lượng $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là số gia tương ứng của hàm số. Như vậy

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

- Quy tắc tính đạo hàm bằng định nghĩa.

Bước 1: Giả sử Δx là số gia của đối số tại x_0, tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Bước 2: Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bước 3: Tìm $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

2. Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số:

Định lý: Nếu hàm số y = f(x) có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm:

Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a; b) và có đạo hàm tại $x_0 \in (a;b)$. Gọi (C) là đồ thị của hàm số đó.

Định lý 1: Đạo hàm của hàm số y = f(x) tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

Định lý 2: Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số y = f(x) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là : $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, trong đó $y_0 = f(x_0)$.

4. Ý nghĩa vật lý.

- Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình s= s(t), với s(t) là hàm số có đạo hàm. Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số s = s(t) tại t_0 : $v(t_0) = s'(t_0)$.

- Nếu điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số của thời gian $Q = Q(t)$ ($Q(t)$ là một hàm số có đạo hàm) thì cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t_0 là đạo hàm của điện lượng $Q(t)$ tại t_0:

$$I(t_0) = Q'(t_0).$$

5. Đạo hàm trên một khoảng:

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm trên khoảng đó.

II. Bài tập căn bản

Bài 1. Tìm số gia của hàm số $f(x) = x^3$, biết rằng:

a) $x_0 = 1$; $\Delta x = 1$; b) $x_0 = 1$; $\Delta x = -0,1$.

Giải

Ta có: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, do vậy :

a) Với $x_0 = 1$; $\Delta x = 1$ ta có:

$$\Delta y = f(2) - f(1) = 2^3 - 1^3 = 7$$

b) Với $x_0 = 1$; $\Delta x = -0,1$ ta có:

$$\Delta y = f(0,9) - f(1) = (0,9)^3 - 1^3 = -0,271 .$$

Bài 2. Tính Δy và $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của các hàm số sau theo x và Δx:

a) $y = 2x - 5$; b) $y = x^2 - 1$;

c) $y = 2x^3$; d) $y = \frac{1}{x}$.

Giải

a) Giả sử Δx là số gia đối số tại x.

$\Rightarrow \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (2(x + \Delta x) - 5) - (2x - 5) = 2\Delta x$

$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta y}{\Delta x} = 2.$

b) Giả sử Δx là số gia đối số tại x.

Suy ra $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$= (x + \Delta x)^2 - 1 - (x^2 - 1) = 2x.\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x.\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \Delta x + 2x .$$

c) Giả sử Δx là số gia đối số tại x.

Suy ra $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$= 2(x + \Delta x)^3 - 2.x^3 = 6x^2.\Delta x + 6x.(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6x^2\Delta x + 6x.(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3}{\Delta x} = 2(\Delta x)^2 + 6x.\Delta x + 6x^2$$

d) Giả sử Δx là số gia đối số tại x.

Suy ra $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$= \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{2x} = \frac{-\Delta x}{x.(x + \Delta x)}.$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}.\frac{1}{\Delta x} = \frac{-1}{x(x + \Delta x)}.$$

Bài 3.Tính bằng định nghĩa đạo hàm của hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra:

a) $y = x^2 + x$ tại $x_0 = 1$;

b) $y = \frac{1}{x}$ tại $x_0 = 2$;

c) $y = \frac{x + 1}{x - 1}$ tại $x_0 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 1$, ta có

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (1 + \Delta x)^2 + (1 + \Delta x) - 2$$

$$= (\Delta x)^2 + 3\Delta x$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x} = \Delta x + 3.$$

Suy ra $y'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(\Delta x + 3) = 3.$

b) Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 2$,ta có

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{2 + \Delta x} - \frac{1}{2} = \frac{-\Delta x}{2(2 + \Delta x)}$$

$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{2(2 + \Delta x)}$. Vậy $y'(2) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{2(2 + \Delta x)} = -\frac{1}{4}.$

c) Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 0$, ta có:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{\Delta x + 1}{\Delta x - 1} + 1 = \frac{2.\Delta x}{\Delta x - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{\Delta x - 1}.\frac{1}{\Delta x} = \frac{2}{\Delta x - 1}$$

Vậy $y'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x - 1} = -2$.

Bài 4. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{nếu } x<0 \end{cases}$

không có đạo hàm tại $x = 0$ nhưng có đạo hàm tại điểm $x = 2$.

Giải

- Ta có:

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(x-1)^2 - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+}(x - 2) = -2.$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^2}{x} = 0.$$

$\Rightarrow f'(0^+) \neq f'(0^-)$

Suy ra hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$

- Ta có: $f'(2^+) = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{(x-1)^2 + 1}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} x = 2$

$$f'(2^-) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-1)^2 - 1}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} x = 2$$

$\Rightarrow f'(2^+) = f'(2^-) = 2$.

Bài 5. Cho đường cong $y = x^3$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong trong các trường hợp :

a) Tại điểm $(-1; -1)$;

b) Tại điểm có hoành độ bằng 2 ;

c) Biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.

Giải

Ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0}(x^2 + xx_0 + x_0{}^2) = 3x_0{}^2$$

a) Với $x_0 = -1 \Rightarrow f'(-1) = 3$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$ tại điểm $(-1;-1)$ là :

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ hay}$$

$$y + 1 = 3(x + 1) \Leftrightarrow y = 3x + 2.$$

b) Với $x_0 = 2 \Rightarrow f'(2) = 12$ và $y_0 = f(2) = 8$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$ tại điểm có hoành độ bằng 2 là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ hay } y - 8 = 12(x - 2) \Leftrightarrow y = 12x - 16.$$

c) Do hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3, nên
$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 3x_0^2 = 3 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$.

- Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1$

  Nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y - 1 = 3(x - 1)$ hay $y = 3x - 2$.

- Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -1$

  Nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y + 1 = 3(x + 1)$ hay $y = 3x + 2$.

Bài 6. Viết phương trình tiếp tuyến của đường hypebol $y = \frac{1}{x}$.

a) Tại điểm $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$;

b) Tại điểm có hoành độ bằng -1;

c) Biết rằng hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$.

Giải

Ta có: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{-1}{x.x_0} = \frac{-1}{x_0^2}$.

Vậy với $x_0 \neq 0 \Rightarrow f'(x_0) = \frac{-1}{x_0^2}$.

a) Tại $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4$

=>Phương trình tiếp tuyến của đường hypebol $y = \frac{1}{x}$ tại điểm $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ là:

$y - 2 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)$ hay $y = -4x + 4$.

b) Tại $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = f(-1) = -1$ và $f'(-1) = -1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đường hypebol $y = \frac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ -1 là: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Hay $y + 1 = -1(x + 1) \Leftrightarrow y = -x - 2$.

c) Do hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$, nên

$$\frac{-1}{x_0^2} = \frac{-1}{4} \Leftrightarrow x_0 = \pm 2.$$

- Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là:

$$y - y_0 = -\frac{1}{4}(x - x_0) \text{ hay } y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + 1$$

- Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -\frac{1}{2}$

Vậy phương trình tiếp tuyến là:

$$y - y_0 = -\frac{1}{4}(x - x_0) \text{ hay } y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x + 2)$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x - 1$$

Bài 7. Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g \approx 9,8m/s^2$ là gia tốc trọng trường.

a) Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t ($t = 5s$) đến $t + \Delta t$, biết rằng $\Delta t = 0,1s$; $\Delta t = 0,05s$; $\Delta t = 0,001s$.

b) Tìm vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t_0 = 5s$.

Hướng dẫn giải

a)

- Khi $\Delta t = 0,1s$, vận tốc trung bình của chuyển động là:

$$v_{tb} = \frac{\frac{1}{2}g(5,1^2 - 5^2)}{0,1} = \frac{\frac{1}{2}.9,8.0,1.10,1}{0,1} = 49,49m/s.$$

- Khi $\Delta t = 0,05s$, vận tốc trung bình của chuyển động là:

$$v_{tb} = \frac{\frac{1}{2}g(5,05^2 - 5^2)}{0,05} = 49,245m/s.$$

- Khi $\Delta t = 0,001s$, vận tốc trung bình của chuyển động là:

$$v_{tb} = \frac{\frac{1}{2}g(5,001^2 - 5^2)}{0,001} = 49,005m/s.$$

b) Ta có: $v_{tb} = s'(t_0) = \left(\frac{1}{2}.g.t^2\right)'_{t_0} = gt_0$

Với $t_0 = 5s \Rightarrow v_{t_0} = 9,8.5 = 49m/s.$

III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Cho hàm số $f(x) = x^2 + x$. Khi đó $f'(0,1)$ bằng:

(A) 1 ; (B) 1,1 ; (C) 1,2 ; (D) 1,3.

2. Cho hàm số $f(x) = x^3 + x$ và $\Delta x = 1$ là số gia của đối số $x_0 = 2$. Khi đó số gia Δy của hàm số là:

(A) $\Delta y = 19$; (B) $\Delta y = 20$; (C) $\Delta y = 21$; (D) $\Delta y = 22$.

3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{với } x \geq 0 \\ -x^2 + 2m + 1 & \text{với } x<0 \end{cases}$

(A) m = 0 ; (B) m = 1 ; (C) m = −1 ; (D) m = 2.

4. Tiếp tuyến của đường cong $y = x^3 + x$ tại điểm I(1; 2) là:

(A) y = 4x + 1 ; (B) y = 4x +2 ;

(C) y = 4x − 1 ; (D) y = 4x − 2 .

5. Tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{1}{x+1}$ tại điểm có hoành độ x = −2 là:

(A) y = −x + 1 ; (B) y = −x − 3 ;

(C) y = −x − 1 ; (D) y = − x + 2.

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(C)	(B)	(A)	(D)	(B)

§2. QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Đạo hàm của một số hàm số thường gặp.

- Hàm số $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N}, n > 1)$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $\left(x^n\right)' = n.x^{n-1}$
- Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm tại mọi x dương và $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương.

Giả sử u = u(x), v = v(x) là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có:

- $(u + v)' = u' + v'$
- $(u - v)' = u' - v'$
- $(u.v)' = u'v + uv'$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ $(v = v(x) \neq 0)$.

3. Đạo hàm của hàm hợp.

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u.u'_x$

II. Bài tập căn bản

Bài 1. Bằng định nghĩa, tìm đạo hàm của hàm số:

a) $y = 7 + x - x^2$ tại $x_0 = 0$;

b) $y = x^3 - 2x + 1$ tại $x_0 = 2$.

Giải

a) Cho $x_0 = 1$ số gia Δx, ta có

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f\left(x_0\right) = 7 + (1 + \Delta x) - (1 + \Delta x)^2 - (7 + 1 - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\Delta x - 1$$

$$\Rightarrow y'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-\Delta x - 1) = -1$$

Vậy $y'(1) = -1$

b) Cho $x_0 = 2$ số gia Δx, ta có

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (2+\Delta x)^3 - 2(2+\Delta x) + 1 - \left(2^3 - 2.2 + 1\right)$$

$$= (\Delta x)^3 + 6(\Delta x)^2 + 10\Delta x$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = (\Delta x)^2 + 6\Delta x + 10.$$

$$\Rightarrow y'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left((\Delta x)^2 + 6\Delta x + 10\right) = 10$$

Vậy $y'(2) = 10$.

Bài 2. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$; b) $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0,5x^4$;

c) $y = \frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{5} - 1$; d) $y = 3x^5\left(8 - 3x^2\right)$.

Giải

a) Ta có $y' = \left(x^5 - 4x^3 + 2x - 3\right)' = \left(x^5\right)' - \left(4x^3\right)' + (2x)' - 3'$

$$= 5x^4 - 12x^2 + 2x.$$

b) Ta có: $y' = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0,5x^4\right)' = \left(\frac{1}{4}\right)' - \left(\frac{1}{3}x\right)' + \left(x^2\right)' - \left(0,5x^4\right)'$

$$= -\frac{1}{3} + 2x - 2x^3.$$

c) Ta có: $y' = \left(\frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{5} - 1\right)' = \left(\frac{x^4}{2}\right)' - \left(\frac{2x^3}{3}\right)' + \left(\frac{4x^2}{5}\right)' - 1'$

$$= 2x^3 - 2x^2 + \frac{8}{5}x.$$

d) Ta có $y' = \left[3x^5\left(8 - 3x^2\right)\right]' = \left(3x^5\right)'.\left(8 - 3x^2\right) + 3x^5\left(8 - 3x^2\right)'$

$$= 15x^4\left(8 - 3x^2\right) + 3x^5(-6x)$$

$$= -45x^6 + 120x^4 - 18x^6 = 120x^4 - 63x^6.$$

Bài 3. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \left(x^7 - 5x^2\right)^3$; b) $y = \left(x^2 + 1\right)\left(5 - 3x^2\right)$;

c) $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$; d) $y = \frac{3 - 5x}{x^2 - x + 1}$;

e) $y = \left(m + \frac{n}{x^2}\right)^3$, (m, n là các hằng số).

Giải

a) Đặt $u = x^7 - 5x^2 \Rightarrow u'_x = 7x^6 - 10x$.

$\Rightarrow y = u^3 \Rightarrow y'_u = 3u^2$

$\Rightarrow y'_x = y'_u.u'_x = 3\left(x^7 - 5x^2\right)^2.\left(7x^6 - 10x\right)$.

Vậy $\left[\left(x^7 - 5x^2\right)^3\right]' = 3.\left(x^7 - 5x^2\right)^2\left(7x^6 - 10x\right)$.

b) $y' = \left[\left(x^2 + 1\right)\left(5 - 3x^2\right)\right]' = \left(x^2 + 1\right)'.\left(5 - 3x^2\right) + \left(x^2 + 1\right).\left(5 - 3x^2\right)'$

$= 2x\left(5 - 3x^2\right) + \left(x^2 + 1\right)(-6x) = -12x^3 + 4x$.

c) $$y' = \left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right)' = \frac{(2x)'\left(x^2 - 1\right) - 2x.\left(x^2 - 1\right)'}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{2\left(x^2 - 1\right) - 2x.2x}{\left(x^2 - 1\right)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-2\left(x^2 + 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2}.$$

d). Ta có: $$y' = \left(\frac{3 - 5x}{x^2 - x + 1}\right)' = \frac{(3 - 5x)'\left(x^2 - x + 1\right) - (3 - 5x)\left(x^2 - x + 1\right)'}{\left(x^2 - x + 1\right)^2}$$

$$= \frac{-5\left(x^2 - x + 1\right) - (3 - 5x)(2x - 1)}{\left(x^2 - x + 1\right)^2} = \frac{5x^2 - 6x - 2}{\left(x^2 - x + 1\right)^2}.$$

e) Ta có: $$y' = \left(\left(m + \frac{n}{x^2}\right)^3\right)' = 3.\left(m + \frac{n}{x^2}\right)^2.\left(m + \frac{n}{x^2}\right)' = -\frac{6n}{x^3}.\left(m + \frac{n}{x^2}\right)^2.$$

Bài 4. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 - x\sqrt{x} + 1$; b) $y = \sqrt{2 - 5x - x^2}$;

c) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (a là hằng số) ; d) $y = \dfrac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$.

Giải

a) Ta có: $y' = \left(x^2 - x\sqrt{x} + 1\right)' = \left(x^2\right)' - \left(x\sqrt{x}\right)' + 1' = 2x - \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

b) Ta có: $$y' = \left(\sqrt{2 - 5x - x^2}\right)' = \frac{\left(2 - 5x - x^2\right)'}{2\sqrt{2 - 5x - x^2}} = \frac{-5 - 2x}{2\sqrt{2 - 5x - x^2}}.$$

c) Ta có: $y' = \left(\dfrac{x^3}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)' = \dfrac{\left(x^3\right)'.\sqrt{a^2 - x^2} - x^3\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)'}{a^2 - x^2}$.

$$= \frac{3x^2.\sqrt{a^2 - x^2} - x^3\dfrac{\left(a^2 - x^2\right)'}{2\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2} = \frac{3x^2.\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2}$$

$$= \frac{x^2\left(3a^2 - 2x^2\right)}{\sqrt{\left(a^2 - x^2\right)^3}}.$$

d) Ta có: $y' = \left(\dfrac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}\right)' = \dfrac{(1 + x)'\sqrt{1 - x} - (1 + x)\left(\sqrt{1 - x}\right)'}{1 - x}$

$$= \frac{\sqrt{1 - x} - (1 + x)\dfrac{-1}{2\sqrt{1 - x}}}{1 - x} = \frac{3 - x}{2\sqrt{(1 - x)^2}}.$$

Bài 5. Cho $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Tìm x để:

a) $y' > 0$; b) $y' < 3$.

Giải

Ta có $y' = \left(x^3 - 3x^2 + 2\right)' = 3x^2 - 6x$.

a) $y' > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 0 \end{array}\right.$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 0 \end{array}\right.$ là giá trị cần tìm

b) $y' < 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x < 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 < 0$

$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$

III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Cho hàm số: $y = \sqrt{4x^3 - 3x}$. Khi đó đạo hàm của hàm số tại $x_0 = 1$ là:

(A) $\dfrac{9}{2}$; (B) 4 ; (C) 6 ; (D) $\dfrac{7}{2}$.

2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) Hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2}$ có đạo hàm $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$;

(B) Đạo hàm của hàm số $y = x\sqrt{x-1}$ tại $x = 2$ bằng 2 ;

(C) Hàm số $y = (x^2+1)^5$ có đạo hàm là $x.(x^2+1)^4$;

(D) Đạo hàm của hàm số $y = \left(\sqrt{1+x^2}-1\right)^4$ tại $x = 0$ bằng 0.

3. Cho $f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^3 + (x-2)^2$. Tập nghiệm phương trình $f'(x) = 0$ là:

(A) $\varnothing$; (B) $\{\pm 3\}$; (C) $\mathbb{R}$; (D) $\{\pm\sqrt{3}\}$.

4. Cho $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x$. Khi đó $f'(x) \geq 0$ khi :

(A) $x \in (-\infty; 1]$; (B) $x \in [-5; 1]$;

(C) $x \in [-5; +\infty)$; (D) $x \in (-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$.

5. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq -3$ là:

(A) $(-\infty; 0]$; (B) $[-2; 0]$;

(C) $[-2; +\infty)$; (D) $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$.

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(A)	(C)	(D)	(D)	(B)

§3. ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I. Tóm tắt lý thuyết

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2. $(\sin x)' = \cos x$; $(\sin u)' = u'.\cos u$.

3. $(\cos x)' = -\sin x$; $(\cos u)' = -u'.\sin u$.

4. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$.

5. $(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$; $(\cot u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$.

II. Bài tập căn bản

Bài 1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x-1}{5x-2}$; b) $y = \dfrac{2x+3}{7-3x}$;

c) $y = \dfrac{x^2+2x+3}{3-4x}$; d) $y = \dfrac{x^2+7x+3}{x^2-3x}$.

Giải

a) Ta có:

$$y' = \left(\frac{x-1}{5x-2}\right)' = \frac{(x-1)'(5x-2)-(x-1)(5x-2)'}{(5x-2)^2} = \frac{5x-2-5(x-1)}{(5x-2)^2}$$

$$= \frac{3}{(5x-2)^2}$$

b) Ta có:

$$y' = \left(\frac{2x+3}{7-3x}\right)' = \frac{(2x+3)'.(7-3x)-(2x+3).(7-3x)'}{(7-3x)^2} = \frac{2(7-3x)+3(2x+3)}{(7-3x)^2}$$

$$= \frac{23}{(7-3x)^2}.$$

c) Ta có: $y' = \left(\dfrac{x^2+2x+3}{3-4x}\right)' = \dfrac{(x^2+2x+3)'(3-4x)-(x^2+2x+3)(3-4x)'}{(3-4x)^2}$

$$= \frac{(2x+2)(3-4x)+4(x^2+2x+3)}{(3-4x)^2} = \frac{-4x^2+6x+18}{(3-4x)^2}$$

d) Ta có:

$$y' = \left(\frac{x^2+7x+3}{x^2-3x}\right) = \frac{(x^2+7x+3)'(x^2-3x)-(x^2+7x+3)(x^2-3x)'}{(x^2-3x)^2}$$

$$= \frac{(2x+7)(x^2-3x)-(x^2+7x+3)(2x-3)}{(x^2-3x)^2} = \frac{-10x^2-6x+9}{(x^2-3x)^2}.$$

Bài 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $y' < 0$ với $y = \dfrac{x^2+x+2}{x-1}$;

b) $y' \ge 0$ với $y = \dfrac{x^2+3}{x+1}$;

c) $y' > 0$ với $y = \dfrac{2x-1}{x^2+x+4}$.

Giải

a) Ta có: $y = \dfrac{x^2 + x + 2}{x - 1}$

$$\Rightarrow y' = \frac{(2x+1)(x-1) - (x^2 + x + 2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}.$$

nên y'<0 $\Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 3 \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \in (-1;1) \cup (1;3)$.

b) Ta có $y = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$ suy ra : $y' = \dfrac{2x(x+1) - (x^2 + 3)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$.

$$\Rightarrow y' \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geq 0 \\ x \neq -1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq -3 \end{array}\right. \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq -3. \end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình có nghiệm: $x \in (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

c) Ta có

$$y = \frac{2x - 1}{x^2 + x + 4} \Rightarrow y' = \frac{2(x^2 + x + 4) - (2x+1)(2x-1)}{(x^2 + x + 4)^2} = \frac{-2x^2 + 2x + 9}{(x^2 + x + 4)^2}$$

Suy ra $y' > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x^2 + 2x + 9}{(x^2 + x + 4)^2} > 0$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \in \left(\dfrac{1 - \sqrt{19}}{2}; \dfrac{1 + \sqrt{19}}{2}\right)$.

Bài 3. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 5\sin x - 3\cos x$; b) $= \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$;

c) $y = x\cot x$; d) $y = \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{x}{\sin x}$;

e) $y = \sqrt{1 + 2\tan x}$; f) $y = \sin\sqrt{1 + x^2}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $y' = (5\sin x - 3\cos x)' = (5\sin x)' - (3\cos x)' = 5\cos x + 3\sin x$.

b) Ta có:

$$y' = \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)' = \frac{(\sin x + \cos x)'(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-2}{1 - \sin 2x}.$$

c) Ta có $y' = (x\cot x)' = x'.\cot x + x.(\cot x)'$

$$= .\cot x - \frac{x}{\sin^2 x}.$$

d) Ta có $y' = \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x}\right)' = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' + \left(\frac{x}{\sin x}\right)'$

$$= \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} + \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = (x\cos x - \sin x)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

e) Ta có $y' = (\sqrt{1 + 2\tan x})' = \frac{(1 + 2\tan x)'}{2\sqrt{1 + 2\tan x}} = \frac{2}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 + 2\tan x}}$

$$= \frac{1 + \tan^2 x}{\sqrt{1 + 2\tan x}}$$

f) Ta có $y' = (\sin\sqrt{1 + x^2})' = (\sqrt{1 + x^2})'.\cos\sqrt{1 + x^2}$

$$= \frac{(1 + x^2)'}{2\sqrt{1 + x^2}}.\cos\sqrt{1 + x^2} = \frac{x.\cos\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Bài 4. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (9 - 2x)(2x^3 - 9x^2 + 1)$; b) $y = \left(6\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right)(7x - 3)$;

c) $y = (x - 2)\sqrt{x^2 + 1}$; d) $y = \tan^2 x - \cot x^2$;

e) $y = \cos\frac{x}{1 + x}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $y' = \left[(9 - 2x)(2x^3 - 9x^2 + 1\right]'$

$$= (9 - 2x)'(2x^3 - 9x^2 + 1) + (9 - 2x)(2x^3 - 9x^2 + 1)'$$

$$= -2(2x^3 - 9x^2 + 1) + (9 - 2x)(6x^2 - 18x)$$

$$= -16x^3 + 108x^2 - 162x - 2.$$

b) $y' = \left[\left(6\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right)(7x-3)\right]'$

$$= \left(6\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right)'(7x-3) + \left(6\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right)(7x-3)'$$

$$= \left(\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3}\right)(7x-3) + 7(6\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}) = -\frac{6}{x^3} + \frac{7}{x^2} - \frac{9}{\sqrt{x}} + 63\sqrt{x}.$$

c) $y' = ((x-2)\sqrt{x^2+1})' = (x-2)'.\sqrt{x^2+1} + (x-2)(\sqrt{x^2+1})'$

$$= \sqrt{x^2+1} + (x-2)\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{x(x-2)}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^2+1}}$$

d) Ta có $y' = (\tan^2 x - \cot x^2)' = (\tan^2 x)' - (\cot x^2)'$

$$= 2\tan x.(\tan x)' + \frac{(x^2)'}{\sin^2(x^2)} = \frac{2\tan x}{\cos^2 x} + \frac{2x}{\sin^2(x^2)}.$$

e) Ta có $y' = \left(\cos\frac{x}{1+x}\right)' = -\left(\frac{x}{1+x}\right)'.\sin\frac{x}{1+x} = -\frac{1}{(1+x)^2}.\sin\frac{x}{1+x}$

Bài 5. Tính $\frac{f'(1)}{\varphi'(1)}$, biết rằng $f(x) = x^2$ và $\varphi(x) = 4x + \sin\frac{\pi x}{2}$.

Giải

Ta có $f'(x) = (x^2)' \Rightarrow f'(1) = 2$.

$\varphi'(x) = (4x + \sin\frac{\pi x}{2})' = (4x)' + (\sin\frac{\pi x}{2})' = 4 + \frac{\pi}{2}.\cos\frac{\pi x}{2}$

$\Rightarrow \varphi'(1) = 4$

Vậy $\frac{f'(1)}{\varphi'(1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Bài 6. Chứng minh rằng các hàm số sau có đạo hàm không phụ thuộc x:

a) $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x.\cos^2 x$

b) $y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x$

Giải

a) Ta có:

$$y' = 6\sin^5 x.\cos x - 6\cos^5 x.\sin x + 3\left[(\sin^2 x)'.\cos^2 x + \sin^2 x.(\cos^2 x)'\right]$$

$$= 6\sin x.\cos x(\sin^4 x - \cos^4 x) + 6\sin x.\cos^3 x - 6\cos x.\sin^3 x.$$

$$= 6\sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x) + 6\sin x\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0 \text{ (đpcm).}$$

b) Ta có

$$y' = \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\right)' + \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\right)' + \left(\cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)\right)' + \left(\cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)\right)' - (2\sin^2 x)'$$

$$= -2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)'.\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right).\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - 2.\left(\frac{\pi}{3} + x\right)'.\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right).\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

$$-2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)'.\sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right).\cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) - 2.\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)'.\sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right).\cos\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$$

$$-4\sin x.\cos x.$$

$$= 2.\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right).\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right).\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 2.\sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right).\cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$$

$$-2\sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right).\cos\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 4\sin x\cos x.$$

$$= \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right) - 2\sin 2x$$

$$= \left(\sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right)\right) - \left(\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right)\right) - 2\sin 2x$$

$$= 2\sin(\pi - 2x).\cos\frac{\pi}{3} - 2.\sin(\pi + 2x).\cos\frac{\pi}{3} - 2\sin 2x.$$

$$= \sin 2x + \sin 2x - 2\sin 2x = 0 \text{(đpcm).}$$

Bài 7. Giải phương trình $f'(x) = 0$, biết rằng:

a) $f(x) = 3\cos x + 4\sin x + 5x$;

b) $f(x) = 1 - \sin(\pi + x) + 2\cos\left(\frac{2\pi + x}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $f'(x) = -3\sin x + 4\cos x + 5$.

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3\sin x + 4\cos x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x = 1 .(*)$$

Đặt $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; $\sin\alpha = \frac{4}{5}$

=>(*) trở thành $\sin(x - \alpha) = 1$.

$$\Leftrightarrow x - \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) Ta có $f'(x) = -\cos(\pi + x) - 2.\left(\frac{2\pi + x}{2}\right)'.\sin\left(\frac{2\pi + x}{2}\right)$

$$= \cos x - \sin\left(\pi + \frac{x}{2}\right) = \cos x + \sin\frac{x}{2}$$

Suy ra $f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos x + \sin\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\frac{x}{2} = 1 \\ \sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \frac{x}{2} = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k4\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k4\pi \\ x = \frac{7\pi}{3} + k4\pi \end{array}\right. ,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 8. Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x)$, biết rằng:

a) $f(x) = x^3 + x - \sqrt{2}$; $g(x) = 3x^2 + x + \sqrt{2}$;

b) $f(x) = 2x^3 - x^2 + \sqrt{3}$; $g(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - \sqrt{3}$.

Giải

a) Ta có $f'(x) = 3x^2 + 1$; $g'(x) = 6x + 1$.

$$\Rightarrow f'(x) > g'(x) \Leftrightarrow 3x^2 + 1 > 6x + 1$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 0 \end{array}\right.$$

b) Ta có $f'(x) = 6x^2 - 2x$; $g'(x) = 3x^2 + x$

$$\Rightarrow f'(x) > g'(x) \Leftrightarrow 6x^2 - 2x > 3x^2 + x$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < 0 \end{array}\right.$$

III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Cho biểu thức $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2\sqrt{2}$. Gọi X là tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq 0$. Khi đó giá trị tập X là:

(A) $(-\infty;1]$; (B) $[0;2]$; (C) $(0;+\infty)$; (D) $[1;+\infty)$.

2. Cho $f(x) = \cos^2 x + 4x + \tan x$. Khi đó $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ là:

(A) 3 ; (B) 4 ; (C) 5 ; (D) 6.

3. Cho $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + \frac{3}{4}\sin^2 2x + \frac{1}{4}$. Khi đó $f'(x)$ là:

(A) $\frac{1}{2}$; (B) $\frac{1}{4}$; (C) 1 ; (D) 0.

4. Cho $f(x) = \sqrt{2 + \tan x}$. Khi đó $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ là:

(A) 2 ; (B) 1 ; (C) $\frac{1}{2}$; (D) $\frac{1}{4}$.

5. Cho $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4\sqrt{2}$ và $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2008$. Gọi X là tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq g'(x)$ là:

(A) $[0;3]$; (B) $[-3;0]$; (C) $(-\infty;-3] \cup [0;+\infty)$; (D) $\varnothing$.

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(B)	(C)	(D)	(A)	(B)

§4. VI PHÂN

I. Tóm tắt lý thuyết

- Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a; b) và có đạo hàm tại $x \in (a;b)$. Giả sử Δx là số gia của x.

Định nghĩa: Ta gọi tích $f'(x).\Delta x$ là vi phân của hàm số y = f(x) tại x ứng với số gia Δx, ký hiệu là df(x) hoặc dy.

$$dy = df(x) = f'(x).\Delta x.$$

- Chú ý: Với y = x, ta có $dx = d(x) = (x').\Delta x = \Delta x$.

Suy ra, với hàm số y = f(x), ta có:

$$dy = df(x) = f'(x)dx.$$

- Ứng dụng của vi phân vào phép tính gần đúng.

  $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$.

II. Bài tập căn bản

Bài 1. Tìm vi phân của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{a+b}$ (a, b là các hằng số) ;

b) $y = (x^2 + 4x + 1)(x^2 - \sqrt{x})$.

Giải

a) Ta có $y=\dfrac{\sqrt{x}}{a+b} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{a+b}.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Vậy : $dy = d\left(\dfrac{\sqrt{x}}{a+b}\right) = \dfrac{1}{2(a+b).\sqrt{x}}dx$

b) $y= (x^2 + 4x + 1)(x^2 - \sqrt{x})$

$\Rightarrow y' = (x^2 + 4x + 1)'(x^2 - \sqrt{x}) + (x^2 + 4x + 1).(x^2 - \sqrt{x})'$

$= (2x + 4)(x^2 - \sqrt{x}) + (x^2 + 4x + 1)(2x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}})$

Vậy $dy = y'dx = \left[(2x + 4)(x^2 - \sqrt{x}) + (x^2 + 4x + 1)(2x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}})\right]dx$

Bài 2. Tìm dy biết:

a) $y = \tan^2 x$;

b) $y = \dfrac{\cos x}{1 - x^2}$.

Giải

a) Ta có $y' = (\tan^2 x)' = 2\tan x.\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

$\Rightarrow y' = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$

Vậy $dy = y'.dx = \dfrac{2\sin x.dx}{\cos^3 x}$

b) $y = \dfrac{\cos x}{1 - x^2} \Rightarrow y' = \dfrac{(\cos x)'.(1 - x^2) - \cos x.(1 - x^2)'}{(1 - x^2)^2}$

$= \dfrac{(x^2 - 1)\sin x + 2x.\cos x}{(1 - x^2)^2}$

Vậy $dy = y'.dx = \dfrac{(x^2-1).\sin x + 2x.\cos x}{(1-x^2)^2}dx.$

III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Cho $y = \sqrt{1+\tan^2 x}$, Khi đó vi phân của hàm số là:

(A) $dy = \dfrac{\tan x}{\cos^2 x.\sqrt{1+\tan^2 x}}dx$; (B) $dy = \dfrac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan^2 x}}$;

(C) $dy = \dfrac{\tan x.dx}{2\sqrt{1+\tan^2 x}}$; (D) $dy = \dfrac{\tan x.dx}{2\cos^2 x}$.

2. Vi phân của hàm số y = cos(sinx) là:

(A) sin(sinx)dx ; (B) sinx.sin(sinx)dx ;

(C) cosx.sin(sinx)dx ; (D) cosx.sin(cosx)dx .

3. Giá trị gần đúng của $\sqrt{8,99}$ là:

(A) 2,9900 ; (B) 2,9983 ; (C) 2,9990 ; (D) 2,9980.

4. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{\cos\sqrt{x^2+1}}$. Khi đó dy là:

(A) $\dfrac{\sin\sqrt{x^2+1}}{\cos^2\sqrt{x^2+1}}dx$; (B) $\dfrac{-1}{\cos\sqrt{x^2+1}}dx$;

(C) $\dfrac{x}{\text{cox}\sqrt{x^2+1}}dx$; (D) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}.\cos^2\sqrt{x^2+1}}dx$.

5. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) $d\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right) = \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)dx$; (B) $d(\tan^2 x+1) = 2\tan x dx$;

(C) $d(\sqrt{x^2+1}) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$; (D) $d(\cos x+\tan x) = \left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-\sin x\right)dx$.

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(A)	(C)	(B)	(D)	(B)

§5. ĐẠO HÀM CẤP HAI

I.Tóm tắt lý thuyết

1. Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm cấp n – 1, ký hiệu $f^{(n-1)}(x)$. Nếu $f^{(n-1)}(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm đó gọi là đạo hàm cấp n của f(x), ký hiệu là $y^{(n)}$ hay $f^{(n)}(x)$.

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

2. Xét chuyển động xác định bởi phương trình s = f(t), trong đó s = f(t) là một hàm số có đạo hàm đến cấp 2. Gọi $\gamma(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t . Ta có:

$$\gamma(t) = f''(t).$$

II. Bài tập căn bản

Bài 1. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra:

a) $f(x) = (x+10)^6$, $f''(2)$;

b) f(x) = sin3x, $f''(-\frac{\pi}{2})$, $f''(0)$, $f''(\frac{\pi}{18})$.

Giải

a) Ta có:

$$f'(x) = ((x+10)^6)' = 6.(x+10)^5$$

$$f''(x) = (6.(x+10)^5)' = 30.(x+10)^4$$

Suy ra $f''(2) = 30.12^4$

b) Ta có: $f'(x) = (\sin 3x)' = (3x)'\cos 3x = 3\cos 3x$

$$f''(x) = (f'(x))' = (3.\cos 3x)' = -3.(3x)'.\sin 3x = -9\sin 3x.$$

Suy ra: $f''(-\frac{\pi}{2}) = -9.\sin(3.(-\frac{\pi}{2}) = -9.\sin(-\frac{3\pi}{2}) = -9.$

$f''(0) = -9.\sin 0 = 0$;

$f''(\frac{\pi}{18}) = -9.\sin\frac{\pi}{6} = -9.\frac{1}{2} = -\frac{9}{2}$

Bài 2. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = y = \frac{1}{1-x}$; b) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$;

c) y = tan x ; d) $y = \cos^2 x$.

Giải

a) Ta có $y' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{-(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

$$y'' = (y')' = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) = \frac{-((1-x)^2)'}{(1-x)^4} = \frac{-2.(1-x).(1-x)'}{(1-x)^4}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

b) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow y' = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)' = \frac{-(\sqrt{1-x})'}{1-x} = \frac{-(1-x)'}{2\sqrt{1-x}.(1-x)} = \frac{1}{2\sqrt{(1-x)}^3}$

$$y'' = \left(\frac{1}{2\sqrt{(1-x)^3}}\right)' = \frac{-(2\sqrt{(1-x)^3})'}{4(1-x)^3} = \frac{-2((1-x)^3)'}{2\sqrt{(1-x)^3}.4(1-x)^3}$$

$$= \frac{6.(1-x)^2}{8.\sqrt{(1-x)^3}.(1-3)^3} = \frac{3}{4}.\frac{1}{\sqrt{(1-x)^5}}.$$

c) Ta có $y = \tan x \Rightarrow y' = (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$\Rightarrow y'' = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = \frac{-(\cos^2 x)'}{\cos^4 x} = \frac{-2.\cos x.(\cos x)'}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

d) Ta có $y = \cos^2 x$

$\Rightarrow y' = (\cos^2 x)' = -2\sin x\cos x = -\sin 2x.$

$y'' = (-\sin 2x)' = -(2x)'.\cos 2x = -2\cos 2x.$

III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Cho hàm số $y = \sqrt{4x+1}$. Giá trị $y''(2)$ là:

(A) $-\frac{4}{27}$; (B) $\frac{4}{27}$; (C) $\frac{2}{3}$; (D) $\frac{-2}{3}$.

2. Cho biểu thức: $f(x) = \cos 4x$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) $f''(\frac{\pi}{24}) = -8\sqrt{3}$; (B) $f''(\frac{\pi}{16}) = -8$;

(C) $f''(\frac{\pi}{12}) = 8\sqrt{2}$; (D) $f''(-\frac{\pi}{12}) = -8\sqrt{2}$.

3. Cho biểu thức :

(A) $f''(2007) = \frac{2}{20073}$; (B) $f''(\frac{1}{2007}) = -\frac{2.2007^3}{4015^3}$;

(C) $f''(-2007) = \frac{2}{-20073}$; (D) $f''(-\frac{1}{2007}) = \frac{2.2007^3}{4015^3}$.

4. Một chuyển động có phương trình $s(t) = 2007.\ \sin(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2})$ Gia tốc tức thời tại điểm $t_0 = 3$ là:

(A) $\gamma(t_0) = \frac{2007.\pi^2.\sqrt{2}}{288}$; (B) $\gamma(t_0) = \frac{-2007.\pi^2.\sqrt{2}}{288}$;

(C) $\gamma(t_0) = \frac{2007.\pi\ .\sqrt{2}}{24}$; (D) $\gamma(t_0) = \frac{-2007.\pi\ .\sqrt{2}}{24}$.

5. Nếu $f(x) = \cos^3x + 2x^2$ thì $f''(-\frac{\pi}{2})$ bằng:

(A) 3 ; (B) 4 ; (C) 5 ; (D) 6 .

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(A)	(C)	(D)	(B)	(B)

ÔN TẬP CHƯƠNG V

I. Câu hỏi và bài tập tự luận

Bài 1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 5$; b) $y = \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{6}{7x^4}$;

c) $y = \frac{3x^2 - 6x + 7}{4x}$; d) $y = \left(\frac{2}{x} + 3x\right)(\sqrt{x} - 1)$;

e) $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$; f) $y = \frac{-x^2 + 7x + 5}{x^2 - 3x}$.

Giải

a) Ta có: $y' = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 5\right)' = x^2 - x + 1.$

b) Ta có: $y' = \left(\frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{6}{7x^4}\right)'$

$$= \left(\frac{2}{x}\right)' - \left(\frac{4}{x^2}\right)' + \left(\frac{5}{x^3}\right)' - \left(\frac{6}{7x^4}\right)'$$

$$= \frac{-2}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{15}{x^4} + \frac{24}{7x^5}.$$

c) Ta có: $y' = \left(\dfrac{3x^2 - 6x + 7}{4x}\right)' = \dfrac{\left(3x^2 - 6x + 7\right)'.4x - (4x)'.(3x^2 - 6x + 7)}{(4x)^2}$

$$= \frac{3x^2 - 7}{4x^2}.$$

d) Ta có:

$$y' = \left[\left(\frac{2}{x} + 3x\right)\left(\sqrt{x} - 1\right)\right]' = \left(\frac{2}{x} + 3x\right)'.(\sqrt{x} - 1) + \left(\frac{2}{x} + 3x\right).(\sqrt{x} - 1)'$$

$$= \left(\frac{-2}{x^2} + 3\right)(\sqrt{x} - 1) + \left(\frac{2}{x} + 3x\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{9x^2\sqrt{x} - 6x^2 - 2\sqrt{x} + 4}{2x^2}.$$

e) Ta có: $y' = \left(\dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}\right)' = \dfrac{(1 + \sqrt{x})'.(1 - \sqrt{x}) - (1 + \sqrt{x}).(1 - \sqrt{x})'}{(1 - \sqrt{x})^2}$

$$= \frac{\dfrac{1 - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1 + \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(1 - \sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^2}.$$

f) Ta có:

$$y' = \left(\frac{-x^2 + 7x + 5}{x^2 - 3x}\right)' = \frac{(-x^2 + 7x + 5)'(x^2 - 3x) - (-x^2 + 7x + 5)(x^2 - 3x)'}{(x^2 - 3x)^2}$$

$$= \frac{(-2x + 7)(x^2 - 3x) - (-x^2 + 7x + 5)(2x - 3)}{(x^2 - 3x)^2} = \frac{-4x^2 - 10x + 15}{(x^2 - 3x)^2}.$$

Bài 2. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2\sqrt{x}.\sin x - \dfrac{\cos x}{x}$; b) $y = \dfrac{3\cos x}{2x + 1}$;

c) $y = \dfrac{t^2 + 2\cos t}{\sin t}$; d) $y = \dfrac{2\cos\varphi - \sin\varphi}{3\sin\varphi + \cos\varphi}$.

e) $y = \dfrac{\tan x}{\sin x + 2}$; f) $y = \dfrac{\cot x}{2\sqrt{x} - 1}$.

Giải

a) $y = (2\sqrt{x}.\sin x)' - \left(\dfrac{\cos x}{x}\right)'$

$$= (2\sqrt{x})'.\sin x + 2\sqrt{x}.(\sin x)' - \frac{(\cos x)'.x - \cos x.x'}{x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}.\sin x + 2\sqrt{x}\cos x - \frac{-\sin x.x - \cos x}{x^2}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}.\sin x + 2x^2\sqrt{x}.\cos x + x.\sin x + \cos x}{x^2}$$

$$= \frac{(x\sqrt{x} + x)\sin x + (1 + 2x^2\sqrt{x}).\cos x}{x^2}.$$

b) Ta có:

$$y' = \frac{(3\cos x)'.(2x+1) - 3\cos x(2x+1)'}{(2x+1)^2} = \frac{-3(2x+1).\sin x - 6\cos x}{(2x+1)^2}$$

c) $$y' = \frac{(t^2 + 2\cos t)'.\sin t - (t^2 + 2\cos t).(\sin t)'}{(\sin t)'}$$

$$= \frac{(2t - 2\sin t).\sin t - (t^2 + 2\cos t).\cos t}{\cos t}$$

$$= \frac{2t\sin t - t^2\cos t - 2}{\cos t}.$$

d) Ta có:

$$y' = \frac{(2\cos\varphi - \sin\varphi)'.(3\sin\varphi + \cos\varphi) - (2\cos\varphi - \sin\varphi).(3\sin\varphi + \cos\varphi)'}{(3\sin\varphi + \cos\varphi)^2}$$

$$= \frac{(-2\sin\varphi - \cos\varphi)(3\sin\varphi + \cos\varphi) - (2\cos\varphi - \sin\varphi)(3\cos\varphi - \sin\varphi)}{(3\sin\varphi + \cos\varphi)^2}$$

$$= \frac{-7}{(3\sin\varphi + \cos\varphi)^2}.$$

e) Ta có: $$y' = \frac{(\tan x)'.(\sin x + 2) - \tan x.(\sin x + 2)'}{(\sin x + 2)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2 x}.(\sin x + 2) - \tan x.\cos x}{(\sin x + 2)^2} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}(\sin x + 2) - \sin x}{(\sin x + 2)^2}$$

$$= \frac{2 + \sin^3 x}{\cos^2 x(\sin x + 2)^2}.$$

f) Ta có $$y' = \frac{(\cot x)'.(2\sqrt{x} - 1) - \cot x.(2\sqrt{x} - 1)'}{(2\sqrt{x} - 1)^2}$$

$$= \frac{\frac{-1}{\sin^2 x}.(2\sqrt{x} - 1) - \cot x.\frac{1}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x} - 1)^2}$$

$$= \frac{(1 - 2\sqrt{x}).(1 + \cot^2 x) - \frac{\cot x}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x} - 1)^2}.$$

Bài 3. Cho hàm số: $f(x)=\sqrt{1+x}$. Tính $f(3)+(x-3).f'(3)$.

Giải

Ta có $f'(x)=\dfrac{(1+x)'}{2\sqrt{1+x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$

Suy ra $f(3)+(x-3).f'(3)=\sqrt{4}+(x-3).\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=2+\dfrac{x-3}{4}$.

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = \tan x$ và $g(x)=\dfrac{1}{1-x}$. Tính $\dfrac{f'(0)}{g'(0)}$

Giải

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $g'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Suy ra $f'(0)=1$, $g'(0)=1$

Vậy $\dfrac{f'(0)}{g'(0)}=\dfrac{1}{1}=1$.

Bài 5. Giải phương trình $f'(x)=0$, biết rằng :

$$f(x)=3x+\frac{60}{x}-\frac{64}{x^3}+5$$

Giải

Ta có $f'(x)=\left(3x+\dfrac{60}{x}-\dfrac{64}{x^3}+5\right)'$

$$=3+\frac{-60}{x^2}-\frac{-64.3}{x^4}=\frac{3x^4-60x^2+192}{x^4}$$

$\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^4-60x^2+192=0$

$\Leftrightarrow x^4-20x^2+64=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=16 \\ x^2=4 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 4 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm $x=\pm 4$; $x=\pm 2$.

Bài 6. Cho $f_1(x)=\dfrac{\cos x}{x}$, $f_2(x)=x\sin x$. Tính $\dfrac{f_1'(1)}{f_2(1)}$.

Giải

Ta có $f_1'(x)=\dfrac{(\cos x)'.x-\cos x.x'}{x^2}=\dfrac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$

$f_2'(x) = (x\sin x)' = x'.\sin x + x(\sin x)' = \sin x + x\cos x$.

Suy ra $f_1'(1) = -\sin 1 - \cos 1$

$f_2'(1) = \sin 1 + \cos 1$.

Vậy $\dfrac{f_1'(1)}{f_2'(1)} = \dfrac{-\sin 1 - \cos 1}{\sin 1 + \cos 1} = -1$.

Bài 7. Viết phương trình tiếp tuyến:

a) Của hypebol $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ tại điểm A(2; 3) ;

b) Của đường cong $y = x^3 + 4x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$;

c) Của Parabol $y = x^2 - 4x + 4$ tại điểm có tung độ $y_0 = 1$

Giải

a) Ta có $y' = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)' = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

$\Rightarrow y'(2) = -2$.

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến của hypebol $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ tại điểm A(2; 3) là:

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ hay $y - 3 = -2(x-2) \Leftrightarrow 2x + y - 7 = 0$

b) Ta có $y' = 3x^2 + 8x$

$y'(-1) = 3.(-1)^2 + 8(-1) = -5$.

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 2$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3 + 4x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là:

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ hay

$y - 2 = -5(x+1) \Leftrightarrow 5x + y + 3 = 0$.

c) Với $y_0 = 1 \Rightarrow x_0^2 - 4x_0 + 4 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{array}\right.$

Ta có $y' = 2x - 4$.

- Với $x_0 = 1 \Rightarrow y'(1) = -2 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến của parabol tại điểm (1; −1) là: $y - 1 = -2(x-1)$ hay $2x + y - 3 = 0$.
- Với $x_0 = 3 \Rightarrow y'(3) = 2$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến của parabol tại điểm (3; 1) là:

$y - 1 = 2(x-3) \Leftrightarrow 2x - y - 5 = 0$.

Bài 8. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình :

$s = t^3 - 3t^2 - 9t$ trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét.

a) Tính vận tốc của chuyển động khi t = 3s.

b) Tính gia tốc của chuyển động khi t = 3s.

c) Tính gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu.

d) Tính vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

Giải

Ta có: $s' = 3t^2 - 6t - 9$, $s'' = 6t - 6$.

a) Khi t = 2s, vận tốc của chuyển động là:

$$v(t_0) = s'(2) = 3.4 - 6.2 - 9 = -9m/s.$$

b) Khi t = 3s, gia tốc của chuyển động là

$$\gamma(t_0) = \gamma(3) = s''(3) = 6.3 - 6 = 12m/s^2$$

c) Khi vận tốc triệt tiêu thì s' = 0

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 3 \end{array}\right.$$

Tại t = 3, gia tốc của chuyển động là:

$$(t_0) = \gamma(3) = 12m/s^2$$

d) Khi gia tốc triệt tiêu thì s" = 0

$$\Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Khi đó vận tốc của chuyển động là:

$$v(t_0) = v(1)' = s'(1) = 3.1 - 6.1 - 9 = -12m/s.$$

Bài 9. Cho hai hàm số $y = \frac{1}{x\sqrt{2}}$ và $y = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$

Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của mỗi hàm số đã cho tại giao điểm của chúng. Tính góc giữa hai tiếp tuyến kể trên.

Giải

- Tọa độ giao điểm của hai hàm số $y = \frac{1}{x\sqrt{2}}$ và $y = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$ là nghiệm của

hệ: $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{x^2}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$.

- Ta có với $y = \frac{1}{x\sqrt{2}}$ => $y' = \frac{-1}{\sqrt{2}x^2}$

=> $y'(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

=> phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x\sqrt{2}}$

tại điểm $(1; \frac{1}{\sqrt{2}})$ là $y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x - 1)$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}.$$

- Với $y = \frac{x^2}{\sqrt{2}} \Rightarrow y' = \sqrt{2}x$

$$\Rightarrow y'(1) = \sqrt{2}$$

=> phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$

tại điểm $(1; \frac{1}{\sqrt{2}})$ là : $y - \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(x - 1)$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Do $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).(\sqrt{2}) = -1$

=>góc giữa hai tiếp tuyến $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}$ và $y = \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}$ là 90^0.

II. Bài tập trắc nghiệm

Chọn phương án đúng trong các bài tập sau:

Bài 10. Với $g(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$; $g'(2)$ bằng:

(A) 1 ; (B) –3 ; (C) –5 ; (D) 0.

Trả lời

Ta có $g'(x) = \left(\frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}\right)' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$

$$\Rightarrow g'(2) = \frac{2^2 - 2.2 - 3}{(2 - 1)^2} = -3.$$

Vậy (B) là đáp án cần tìm.

Bài 11. Nếu $f(x) = \sin^3 x + x^2$ thì $f''(-\frac{\pi}{2})$ bằng:

(A) 0 ; (B) 1 ; (C) -2 ; (D) 5.

Trả lời

Ta có $f'(x) = 3\sin^2 x.\cos x + 2x$.

$\Rightarrow f''(x) = (3\sin^2 x.\cos x)' + 2$

$= 3(2.\sin x.\cos^2 x - \sin^3 x) + 2$

$$\Rightarrow f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3.\left(2.\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right).\cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin^3\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + 2$$

$= 3 + 2 = 5$.

Vậy (D) là đáp án cần tìm.

Bài 12. Giả sử $h(x) = 5(x+1)^3 + 4(x+1)$.

Tập nghiệm của phương trình $h''(x) = 0$ là:

(A) $[-1;2]$; (B) $(-\infty;0]$; (C) $\{-1\}$; (D) $\varnothing$.

Trả lời

Ta có $h'(x) = 15(x+1)^2 + 4$

$h''(x) = 30(x+1)$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 30(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Vậy (C) là đáp án cần tìm.

Bài 13. Cho $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$.

Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \le 0$ là:

(A) $\varnothing$; (B) $(0;+\infty)$; (C) $[-2;2]$; (D) $(-\infty;+\infty)$.

Trả lời.

Ta có $f'(x) = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

$\Rightarrow f'(x) > 0 \forall x$, suy ra bất phương trình $f'(x) \le 0$ vô nghiệm.

Vậy (A) là đáp án cần tìm.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

I. Câu hỏi

1. Nêu định nghĩa các hàm số lượng giác. Chỉ rõ tập xác định và tập giá trị của từng hàm số đó.

Trả lời.

a. Định nghĩa 1: Hàm số sin:

$$\begin{aligned}\sin:\ &\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ &x \mapsto y = \sin x.\end{aligned}$$

Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$, tập giá trị là đoạn $[-1;1]$.

b. Định nghĩa 2: Hàm số cosin:

$$\begin{aligned}\cos:\ &\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ &x \mapsto y = \cos x.\end{aligned}$$

Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$, tập giá trị là đoạn $[-1;1]$

c. Định nghĩa 3: Hàm số tang:

$$\begin{aligned}\tan:\ &D \to \mathbb{R}\\ &x \mapsto y = \tan x.\end{aligned}$$

Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định $D = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Tập giá trị của hàm số $y = \tan x$ là R.

d. Định nghĩa 4: Hàm số cotang:

$$\begin{aligned}\cot:\ &D \to \mathbb{R}\\ &x \mapsto y = \cot x.\end{aligned}$$

Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định $D = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Tập giá trị của hàm số $y = \cot x$ là tập $\mathbb{R}$.

2. Cho biết chu kỳ của mỗi hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$.

Trả lời

a. Hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là các hàm số tuần hoàn có chu kỳ là 2π.

b. Hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ là các hàm số tuần hoàn có chu kỳ là π

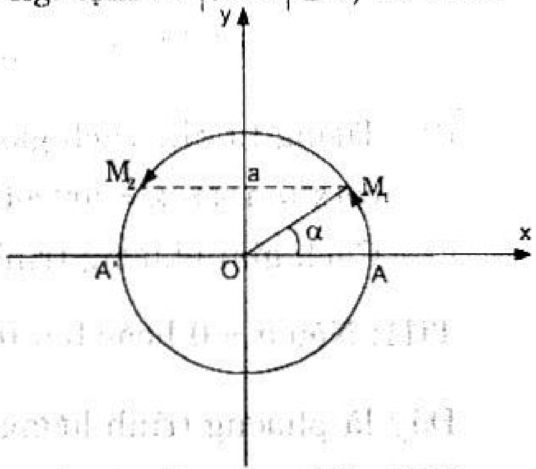
3. Nêu cách giải phương trình lượng giác cơ bản, cách giải phương trình $a\sin x + b\cos x = c$.

Trả lời

a) Cách giải phương trình $\sin x = a$ (1).

- Trường hợp 1: $|a| > 1$, phương trình (1) vô nghiệm vì $|\sin x| \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Trường hợp 2: $|a| \le 1$.

Qua điểm (0; a) dựng đường thẳng vuông góc với Oy cắt đường tròn lượng giác tại các điểm M_1, M_2. Khi đó:



$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \text{sđ}\overset{\curvearrowright}{AM_1} \\ x = \text{sđ}\overset{\curvearrowright}{AM_2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \alpha + k2\pi & (1.1) \\ x = \pi - \alpha + k2\pi & (1.2) \end{array}\right.$$

$(k \in \mathbb{Z})$.

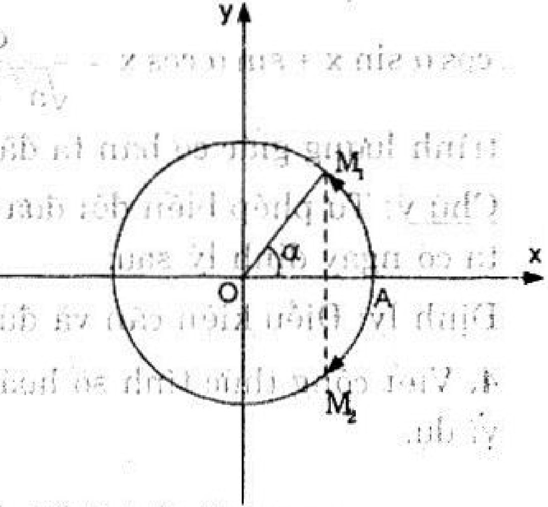
Các công thức nghiệm (1.1) và (1.2) có thể viết lại dưới dạng:

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z},\ \arcsin a = \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right).$$

b) Cách giải phương trình $\cos x = a$ (2).

- Trường hợp 1: $|a| > 1$, phương trình (2) vô nghiệm vì $|\cos x| \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Trường hợp 2: $|a| \le 1$

Qua điểm (a; 0) dựng đường thẳng vuông góc với Ox cắt đường tròn lượng giác tại hai điểm M_1, M_2. Khi đó:



$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \text{sđ}\overset{\curvearrowright}{AM_1} \\ x = \text{sđ}\overset{\curvearrowright}{AM_2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \alpha + k2\pi & (2.1) \\ x = -\alpha + k2\pi & (2.2) \end{array}\right.$$

$(k \in \mathbb{Z})$.

Các công thức nghiệm (2.1) và (2.2) có thể viết lại dưới dạng:

$$\left[\begin{array}{l} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z},\ \arccos a = \alpha \in [0; \pi]\right).$$

c) Cách giải phương trình $\tan x = a$ (3).

Điều kiện xác định của phương trình: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Dựa vào đồ thị của hàm số y = tanx, ta có với mỗi $a \in \mathbb{R}$, đồ thị hàm số y = tanx cắt đường thẳng y = a tại các điểm có hoành độ sai khác nhau một bội của π. Gọi x_1 là một nghiệm bất kỳ của (3) khi đó

$x_1 = \arctan a$ và (3) $\Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi$

$\left(k \in \mathbb{Z}, x_1 = \arctan a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right)$.

d) Tương tự như cách giải phương trình (3), ta cũng có:

$\cot x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} a + k\pi$.

e) Cách giải phương trình : asinx + bcosx = c (*) $(a^2+b^2 \neq 0)$.

TH1: Nếu a = 0 hoặc b = 0, chẳng hạn a = 0, ta có ngay: $\cos x = \frac{c}{b}$.

Đây là phương trình lượng giác cơ bản, đã biết cách giải.

TH2: Nếu $a.b \neq 0$, ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Vì $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ nên tồn tại số α để $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}$,

$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Khi đó, phương trình được đưa về dạng:

$\cos\alpha \sin x + \sin\alpha \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Đây là phương trình lượng giác cơ bản ta đã biết cách giải.

Chú ý: Từ phép biến đổi đưa (*) về dạng phương trình lượng giác cơ bản ta có ngay định lý sau:

Định lý: Điều kiện cần và đủ để (*) có nghiệm là: $a^2 + b^2 \geq c^2$.

4. Viết công thức tính số hoán vị của tập hợp gồm n phần tử (n>1. Nêu ví dụ.

Trả lời.

Ký hiệu P_n là số các hoán vị của tập hợp gồm n phần tử (n>1) và P_n được xác định: $P_n = 1.2....n$ hay $P_n = n!$

Ví dụ: Tính số các hoán vị của tập $A = \{a, b, c, d\}$.

Giải

Tập A có 4 phần tử, do đó số các hoán vị của tập A là $P_4 = 24$.

5. Viết công thức tính số chỉnh hợp chập k của n phần tử, công thức tính số tổ hợp chập k của n phần tử . Cho ví dụ.

Trả lời.

a. Ký hiệu A_n^k là số các chỉnh hợp chập k của n phần tử và A_n^k được xác định: $A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$

$$\text{hay } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Với $1 \le k \le n$; $n \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ: Tính số các chỉnh hợp chập 3 của 4 phần tử.

Giải

Số các chỉnh hợp chập 3 của 4 phần tử là: $A_4^3 = \dfrac{4!}{(4-3)!} = 24$.

b. Ký hiệu C_n^k là số các tổ hợp chập k của n phần tử và C_n^k được xác định $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $(0 \le k \le n)$.

Ví dụ: Một lớp gồm 50 học sinh. Cần lập một đoàn đại biểu đi dự đại hội Đoàn trường gồm có 3 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách lập.

Giải. Rõ ràng một nhóm 3 bạn học sinh chính là 1 tổ hợp chập 3 của 50. Do đó số cách lập đoàn đại biểu là: $C_{50}^3 = 19600$ (cách).

6. Viết công thức nhị thức Niutơn.

Trả lời.

Công thức nhị thức Niutơn:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n .$$

Chú ý: số hạng $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ được gọi là số hạng tổng quát của khai triển $(a+b)^n$.

7. Phát biểu định nghĩa xác suất của biến cố.

Trả lời

Giả sử A là một biến cố liên quan đến phép thử chỉ có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Ta gọi tỉ số $\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$ là xác suất của biến cố A, ký hiệu là P(A).

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

8. Nêu rõ các bước chứng minh bằng quy nạp toán học và cho ví dụ

Trả lời

- Để chứng minh những mệnh đề liên quan đến số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$ là đúng với mọi n mà không thể thử trực tiếp được thì ta làm như sau:

Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n=1$.

Bước 2: Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì $n = k \geq 1$ (gọi là giả thiết quy nạp), chứng minh rằng nó cũng đúng với $n=k+1$.

Bước 3: Kết luận mệnh đề đúng với $n \in \mathbb{N}^*$.

- Ví dụ. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có : $n^3 + 5n$ chia hết cho 6.

Chứng minh: Đặt $P(n) = n^3 + 5n$.

Với $n = 1 \Rightarrow P(1) = 6 \vdots 6$.

Giả sử (P_n) chia hết cho 6 đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là, ta có:
$P(k) = (k^3 + 5k) \vdots 6$.

Ta có: $P(k + 1) = (k+1)^3 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5$

$= k^3 + 5k + 3(k^2+k) + 6$

Mặt khác, theo giả thiết quy nạp ta có: $(k^3+5k) \vdots 6$.

Hơn nữa $k^2+k=k(k+1) \vdots 2$ (hai số tự nhiên liên tiếp k, k+1 phải có một số chẵn do $k(k+1) \vdots 2$).

Do vậy $P(k+1) \vdots 6$, tức mệnh đề đúng với $n=k+1$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n) = n^3+5n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

9. Phát biểu định nghĩa cấp số cộng và công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng.

Trả lời

- Định nghĩa: cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d.

  Số d được gọi là công sai của cấp số cộng

  Ta có: $U_{n+1} = U_n + d, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Cho cấp số cộng (U_n), công sai d. Đặt $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$

  Khi đó:

a) $S_n = \frac{n(U_1 + U_n)}{2}$;

b) $S_n = nU_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$.

10. Phát biểu định nghĩa cấp số nhân và công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân.

Trả lời

- Định nghĩa. Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó từ số hạng thứ hai; mỗi số hạng đều là tích các số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q.

  Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.

  Ta có: $U_{n+1} = U_n.q$, $\forall\ n \in N^*$.

- Cho cấp số nhân (U_n), công bội q. Đặt $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$.

  Khi đó:

$$S_n = U_1 \frac{1-q^n}{1-q} \ (q \neq 1).$$

(Với $q = 1$ thì $S_n = U_1 + U_1 + ... + U_1 = n.U_1$).

11. Dãy số (U_n) thỏa mãn điều kiện gì thì được gọi là có giới hạn 0 khi n dần tới dương vô cực ?

Trả lời

- Dãy số (U_n) được gọi là có giới hạn bằng 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|U_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

. Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} U_n = 0$ hay $U_n \to 0$ khi $n \to +\infty$

Ví dụ: Dãy số: $U_n = \frac{n+1}{n^2+1}$ có giới hạn 0.

12. Viết công thức tính tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn.

Trả lời

Cho cấp số nhân (U_n) (là 1 dãy số vô hạn).

- Nếu $|q| < 1$ thì ta nói cấp số nhân (U_n) là lùi vô hạn.
- Đặt $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$

$\lim S_n = \dfrac{U_1}{1-q}$ (do $|q| < 1$).

Định nghĩa: Số S $= U_1+U_2+...+U_n+... = \dfrac{U_1}{1-q}$, được gọi là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (U_n).

13. Định nghĩa hàm số có giới hạn là $+\infty$ khi $x \to -\infty$.

Trả lời

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x \to -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kỳ, $x_n<a$ và $x_n \to -\infty$, ta có $f(x_n) \to +\infty$.

Ký hiệu $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ hay $f(x) \to +\infty$ khi $x \to -\infty$.

Ví dụ: Hàm số $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 1}{x+1} \to +\infty$ khi $x \to -\infty$.

14. Nêu các giới hạn đặc biệt của dãy số.

Trả lời

a) Một vài giới hạn đặc biệt của dãy số:

- $\lim \dfrac{1}{n} = 0; \lim \dfrac{1}{n^k} = 0$, k nguyên dương ;
- $\lim q^k = 0$ nếu $|q| < 1$;
- $\lim c = c$ ($U_n = c$, dãy số hằng).
- $\lim n^k = +\infty$, k nguyên dương ;
- $\lim q^n = +\infty$ nếu $q>1$.

b) Một vài giới hạn đặc biệt của hàm số.

- $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$, c là hằng số ;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} c = c$, c là hằng số ;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = -\infty$ nếu k là số lẻ ;
- lim $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = +\infty$ với k là số chẵn.
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

15. Nêu định nghĩa hàm liên tục tại một điểm, trên một khoảng. Nêu hình ảnh hình học của một hàm số liên tục trên một khoảng.

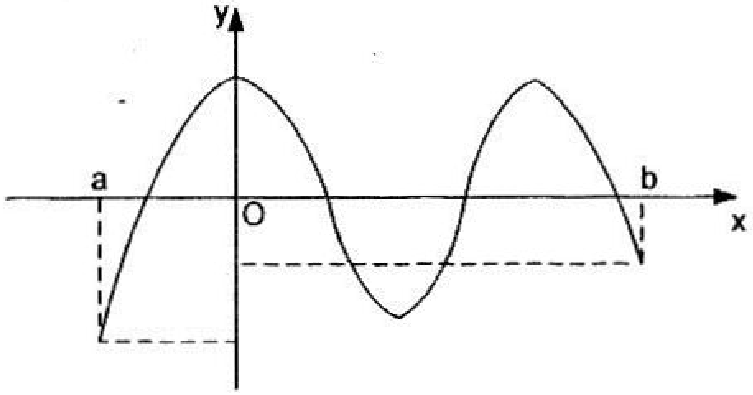
Trả lời

- Định nghĩa 1. Hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

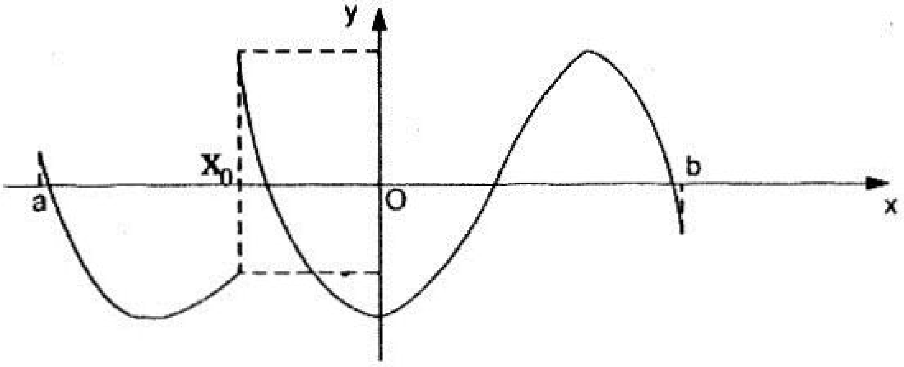
Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Hàm số f(x) không liên tục tại điểm x_0 được gọi là φ gián đoạn tại đó.

- Định nghĩa 2. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng (a; b) nếu nó liên tục tại mọi điểm x thuộc khoảng (a; b).
- Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liền trên khoảng đó.



Đồ thị của hàm số liên tục trên khoảng (a;b)



Đồ thị của hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 \in (a; b)$.

16. Phát biểu định nghĩa đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x = x_0$.

Trả lời.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng (a; b) và $x_0 \in (a; b)$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 và ký hiệu là $f'_0(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$).

Vậy $f'_0(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Chú ý: Ta có thể viết được :

$$f'_{\varphi}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ với } \Delta x = x - x_0 \; ; \; \Delta y = f(x) - f(x_0).$$

17. Viết tất cả các quy tắc tính đạo hàm đã học

Trả lời

a) Ta có $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1$ và $\forall x \in \mathbb{R} : (x)' = nx^{x-1}$.

b) Với mọi x dương, ta có : $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

c) Giả sử u(x), v(x) là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định, ta có: $(u + v)' = u' + v'$

$$(u - v)' = u' - v';$$

$$(u.v)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}; \; v=v(x) \neq 0.$$

Chú ý: . $(u_1 \pm u_2 \pm u_3 \pm \ldots \pm u_n)' = u_1' \pm u_2' \pm u_3' \pm \ldots \pm u_n'$

. Nếu k là hằng số thì $(ku)' = k.u'$.

. $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$; ($v = v(x) \neq 0$).

d) Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u.u'_x$.

18. Giả sử hàm số $g = f(x)$ có đạo hàm tại x_0. Hãy viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $g = f(x)$ tại điểm $M_0\,(x_0 \,;\, f(x_0))$.

Trả lời

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0\,(x_0 \,;\, f(x_0))$ có dạng: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, trong đó $y_0 = f(x_0)$.

II. Bài tập tự luận

Bài 1. Cho hàm số $y = \cos 2x$.

a) Chứng minh rằng $\cos 2(x + k\pi) = \cos 2x$ với mọi số nguyên k. Từ đó vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \cos 2x$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x = \frac{\pi}{3}$.

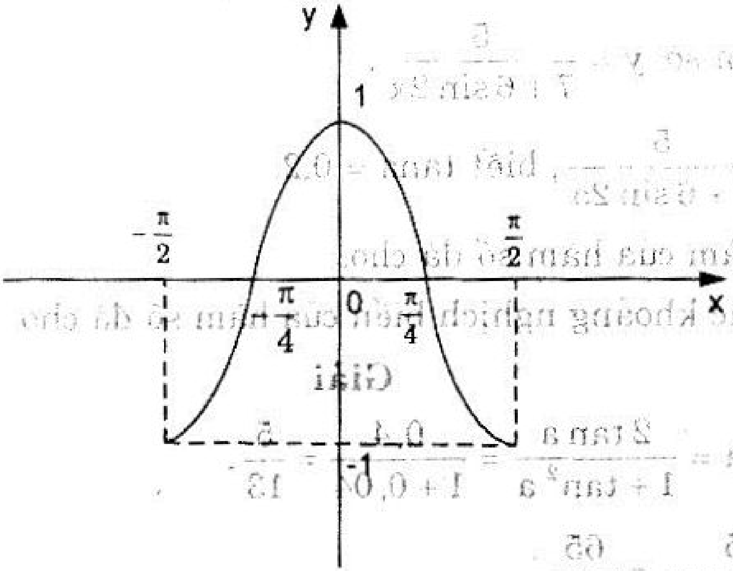
c) Tìm tập xác định của hàm số $z = \sqrt{\dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos^2 2x}}$

Giải

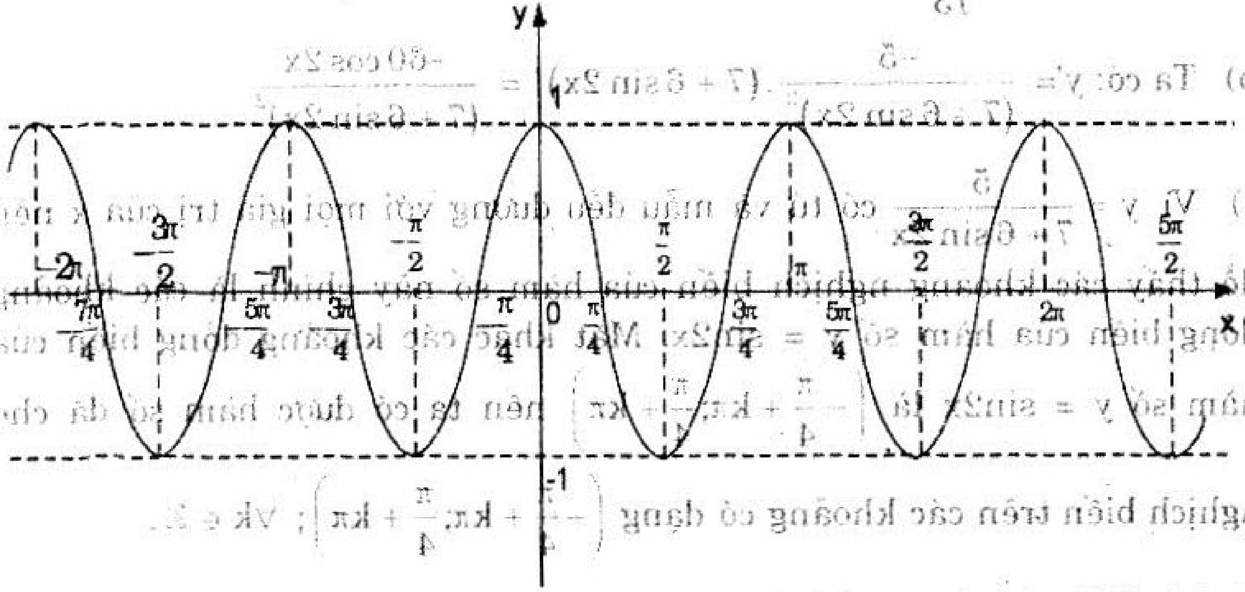
a) Ta có: $\cos 2(x + k\pi) = \cos(2x + 2k\pi) = \cos 2x$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Sử dụng tính chất trên, ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số y = cos2x trên miền $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, từ đó suy ra đồ thị hàm số y = cos2x trên $\mathbb{R}$.

- Đồ thị hàm số y = cos2x trên miền $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.



- Đồ thị hàm số y = cos2x trên $\mathbb{R}$



b) Ta có: $y' = -2\sin 2x \Rightarrow y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -2\sin\dfrac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

Mặt khác điểm trên đồ thị (C) có hoành độ là $\frac{\pi}{3}$ thì có tung độ

$y = \cos\frac{2\pi}{3}$ hay $y = -\frac{1}{2}$. Vì vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm

$\left(\frac{\pi}{3}; -\frac{1}{2}\right)$ có dạng: $y = -\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{1}{2}$.

c) Dễ thấy $1 + \cos^2 2x \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$, do đó hàm số đã cho được xác định khi và chỉ khi $1 - \cos 2x \geq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \leq 1$ được thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số $z = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos^2 2x}}$ là tập $\mathbb{R}$.

Bài 2. Cho hàm số $y = \frac{5}{7 + 6\sin 2x}$.

a) Tính $A = \frac{5}{7 + 6\sin 2a}$, biết $\tan a = 0{,}2$.

b) Tính đạo hàm của hàm số đã cho.

c) Xác định các khoảng nghịch biến của hàm số đã cho.

Giải

a) Ta có $\sin 2a = \frac{2\tan a}{1 + \tan^2 a} = \frac{0{,}4}{1 + 0{,}04} = \frac{5}{13}$.

Do đó $A = \frac{5}{7 + 6.\frac{5}{13}} = \frac{65}{121}$.

b) Ta có: $y' = \frac{-5}{(7 + 6\sin 2x)^2}.(7 + 6\sin 2x)' = \frac{-60\cos 2x}{(7 + 6\sin 2x)^2}$.

c) Vì $y = \frac{5}{7 + 6\sin 2x}$ có tử và mẫu đều dương với mọi giá trị của x nên dễ thấy các khoảng nghịch biến của hàm số này chính là các khoảng đồng biến của hàm số y = sin2x. Mặt khác các khoảng đồng biến của hàm số y = sin2x là $\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$ nên ta có được hàm số đã chc nghịch biến trên các khoảng có dạng $\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$; $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Bài 3. Giải các phương trình:

a) $2\sin\frac{x}{2}\cos^2 x - 2\sin\frac{x}{2}\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$;

b) 3cosx + 4 sinx = 5 ;

c) sinx + cosx = 1 + cosxsinx ;

d) $\sqrt{1-\cos x} = \sin x \quad \left(x \in [\pi; 3\pi]\right)$;

e) $\left(\cos\frac{x}{4} - 2\sin x\right)\sin x + \left(1 + \sin\frac{x}{4} - 2\cos x\right)\cos x = 0$.

Giải

a) Phương trình đã cho được viết lại về dạng tương đương:

$$2\sin\frac{x}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos 2x \Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x - \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(2\sin\frac{x}{2} - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} + k4\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \frac{5\pi}{3} + k4\pi \end{array}\right.$$

b) Phương trình đã cho được viết lại dưới dạng tương đương:

$$\frac{3}{5}\cos x + \frac{4}{5}\sin x = 1.$$

Nhận thấy $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$ nên $\exists\alpha$ sao cho: $\sin\alpha = \frac{3}{5}, \cos\alpha = \frac{4}{5}$

Khi đó phương trình trở thành: $\sin\alpha\cos x + \cos\alpha\sin x = 1$

$$\Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = 1 \Leftrightarrow x + \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi$$

$$(k \in \mathbb{Z}, \sin\alpha = \frac{3}{5}, \cos\alpha = \frac{4}{5}).$$

c) Đặt sinx + cosx = t,với điều kiện $t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$, ta có:

$\sin x\cos x = \frac{-1+t^2}{2}$. Khi đó phương trình trở thành:

$$t = 1 + \frac{t^2-1}{2} \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Do đó phương trình ban đầu tương đương với:

$$\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

d) Phương trình đã cho được viết lại dưới dạng tương đương:

$$\begin{cases} \sin x \ge 0 \\ 1 - \cos x = \sin^2 x \\ x \in [\pi; 3\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2\pi; 3\pi] \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2\pi; 3\pi] \\ x = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x \ne 3\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2\pi \\ x = \frac{5\pi}{2} \\ x = 3\pi \end{array}\right. \\ x \ne 3\pi \end{cases}.$$

Vậy trên $[\pi; 3\pi]$ phương trình có 2 nghiệm $x = 2\pi$; $x = \frac{5\pi}{2}$.

e) Phương trình đã cho được viết lại dưới dạng tương đương:

$$\cos\frac{x}{4}\sin x + \sin\frac{x}{4}\cos x - 2(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{5x}{4} + \cos x = 2 \ (*)$$

Vì $\sin\frac{5x}{4} \le 1$ và $\cos x \le 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, nên:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{5x}{4} = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{x}{4}\sin x + \sin\frac{x}{4}\cos x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{x}{4} = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{x}{4} = 1 \\ 2\sin^2\frac{x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{x}{4} = 1 \\ \sin\frac{x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{x}{4} = 1 \\ 2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{x}{4} = 1 \\ \cos\frac{x}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = 2\pi + k8\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 4. Trong một bệnh viện có 40 bác sĩ ngoại khoa. Hỏi có bao nhiêu cách phân công ca mổ, nếu mỗi ca gồm:

a) Một bác sĩ mổ và một bác sĩ phụ ?

b) Một bác sĩ mổ và bốn bác sĩ phụ ?

Giải

a) Có 40 cách chọn một bác sĩ mổ, ứng với mỗi cách chọn một bác sĩ mổ có 39 cách chọn một bác sĩ phụ. Theo quy tắc nhân có tất cả là:

$40.39 = 1560$ (cách) phân công ca mổ.

b) Có 40 cách một bác sĩ mổ, ứng với mỗi cách chọn một bác sĩ mổ còn lại 39 bác sĩ ta cần chọn 4 bác sĩ phụ, số cách chọn 4 bác sĩ phụ chính là số các tổ hợp chập 4 của 39. Do đó, theo quy tắc nhân có tổng cộng: $40.C_{39}^4 = 3290040$ cách.

Bài 5. Tìm số hạng không chứa a trong khai triển của nhị thức: $\left(\frac{1}{a^3}+a^2\right)^{10}$.

Giải

Số hạng tổng quát của khai triển là $C_{10}^k\left(\frac{1}{a^3}\right)^{10-k}\left(a^2\right)^k$

Ta có:

$$C_{10}^k\left(\frac{1}{a^3}\right)^{10-k}\left(a^2\right)^k = C_{10}^k a^{-3(10-k)}.a^{2k} = C_{10}^k.a^{-30+3k}.a^{2k} = C_{10}^k a^{-30+5k}$$

Số hạng không chứa a trong khai triển ứng với giá trị của k là:

$$-30+5k=0 \Leftrightarrow 5k=30 \Leftrightarrow k=6$$

Ta có: $C_{10}^6 = \dfrac{10!}{6!(10-6)!} = 210$

Vậy số hạng không chứa a trong khai triển là 210.

Bài 6. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh từ một tổ gồm có 6 nam và 4 nữ. Tính xác suất sao cho:

a) Cả 3 học sinh đều là nam ;

b) Có ít nhất một nam.

Giải

Số cách chọn 3 học sinh trong tổ là: $C_{10}^3 = 120$ (cách). Đây cũng chính là số phần tử của không gian mẫu, tức là: $n(\Omega) = 120$.

a) Số cách chọn được cả ba học sinh đều là nam là: $C_{10}^3 = 20$. Do vậy xác suất để chọn được ba học sinh nam là: $P_1 = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$.

b) Gọi A là biến cố: " có ít nhất một nam ".

B là biến cố: " cả ba học sinh đều là nữ ".

Rõ ràng: $A \cup B = \Omega$, $A \cap B = \varnothing$ hay $A = \overline{B}$.

Mặt khác, số cách chọn cả ba học sinh đều là nữ sẽ là: $C_4^3 = 4$

Do vậy $P(B) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30} \Rightarrow P(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$.

Bài 7. Một tiểu đội có 10 người được xếp ngẫu nhiên thành hàng dọc, trong đó có anh A và anh B. Tính xác suất sao cho:

a) A và B đứng liền nhau ;

b) Trong hai người đó có một người đứng ở vị trí số 1 và người kia đứng ở vị trí cuối cùng.

Giải

Mỗi một cách xếp 10 người thành hàng dọc chính là một phần tử của không gian mẫu. Do đó $n(\Omega) = 10! = 3628800$.

a) A và B đứng liền nhau khi và chỉ khi A và B chia nhau đứng ở hai vị trí: i và i+1 (i= 1,2,...,9) . Ứng với mỗi giá trị i_0 xác định (i_0 = 1,2,...,9) có hai cách xếp A, B vào các vị trí i_0 và i_{0+1}. Do vậy có tất cả là : 9.2 = 18 cách xếp cho A và B đứng liền nhau. Ứng với mỗi cách xếp cho A, B đứng cạnh nhau có 8! cách xếp 8 người còn lại vào 8 vị trí còn trống. Do đó có tất cả 18.8! = 2.9! cách xếp hàng cho cả 10 người thỏa mãn A, B đứng cạnh nhau. Xác suất của biến cố này là: $P_1 = \frac{2.9!}{10!}$ hay $P_1 = 0,2$.

b) Chỉ có đúng 2 cách xếp cho A, B thỏa mãn yêu cầu bài toán đó là A ở vị trí 1, B ở vị trí 10 hoặc A ở vị trí 10, B ở vị trí 1. Ứng với mỗi cách xếp đó có 8! cách xếp 8 người còn lại vào các vị trí từ 2 đến 9. Do vậy có 2.8! cách xếp 10 người thỏa mãn yêu cầu bài toán, từ đây có $P_2 = \frac{2.8!}{10!} = \frac{1}{45}$.

Bài 8. Tìm một cấp số cộng tăng, biết rằng tổng ba số hạng đầu của nó bằng 27 và tổng các bình phương của chúng bằng 275.

Giải

Gọi công sai của cấp số cộng là d(d>0) số hạng đầu là u_1 với $u_1 = x - d$; $u_2 = x$; $u_3 = x + d$.

Theo giả thiết, ta có hệ: $\begin{cases} x - d + x + x + d = 27 \\ (x - d)^2 + x^2 + (x + d)^2 = 275 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ 3x^2 + 2d^3 = 275 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ d = 4 \end{cases} \text{ (Vì } d>0 \text{).}$$

Vậy, cấp số cộng đó có: $u_1 = 5$, công sai $d = 4$.

Bài 9. Cho biết trong một cấp số nhân, hiệu của số hạng thứ 3 và số hạng thứ 2 bằng 12 và nếu thêm 10 vào số hạng thứ nhất, thêm 8 vào số hạng thứ 2 còn giữ nguyên số hạng thứ 3 thì ba số mới lập thành một cấp số cộng. Hãy tính tổng 5 số hạng đầu của cấp số nhân đó.

Giải

Gọi số hạng đầu của cấp số nhân là u_1, công bội là x. Theo giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1x^2 - u_1x = 12 \\ u_1 + 10 + u_1x^2 = 2(u_1x + 8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ u_1 = 6 \end{cases}$$

Do đó số hạng đầu của cấp số nhân là:

$u_1 = 6$; $u_2 = 12$; $u_3 = 24$; $u_4 = 48$; $u_5 = 96$.

Bài 10. Tính các giới hạn:

a) $\lim \dfrac{(n + 1)(3 - 2n)^2}{n^3 + 1}$;

b) $\lim \left(\dfrac{1}{n^2 + 1} + \dfrac{2}{n^2 + 1} + \dfrac{3}{n^2 + 1} + ... + \dfrac{n - 1}{n^2 + 1} \right)$;

c) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2 + 1} + n}{2n + 1}$;

d) $\lim \sqrt{n} \left(\sqrt{n - 1} - \sqrt{n} \right)$.

Giải

a) $$\lim \frac{(n + 1)(3 - 2n)^2}{n^3 + 1} = \lim \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{3}{n} - 2\right)^2}{1 + \frac{1}{n^3}} = 4 .$$

b) $$\lim \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 1} + \frac{3}{n^2 + 1} + ... + \frac{n - 1}{n^2 + 1} \right) = \lim \frac{1 + 2 + 3 + ... + (n - 1)}{n^2 + 1}$$

$$= \lim \frac{(n - 1)n}{2(n^2 + 1)} = \frac{1}{2}.$$

c) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}+n}{2n+1} = \lim \dfrac{\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}+1}{2+\dfrac{1}{n}} = \dfrac{3}{2}$.

d) $\lim \sqrt{n}\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right) = \lim \dfrac{\sqrt{n}(n-1-n)}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = \lim \dfrac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$

$= \lim \dfrac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}+1} = -\dfrac{1}{2}$.

Bài 11. Cho hai dãy số (u_n), (v_n) với $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ và $v_n = \dfrac{n\cos\dfrac{\pi}{2}}{n^2+1}$.

a) Tính $\lim u_n$.

b) Chứng minh rằng $\lim v_n = 0$.

Giải

a) $\lim u_n = \lim \dfrac{n}{n^2+1} = \lim \dfrac{1}{n+\dfrac{1}{n}} = 0$.

b) Ta có $y = \cos x$ là hàm liên tục tại $x = 0$ nên: $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$.

=> $\forall$ dãy (x_n) mà $(x_n) \to 0$ thì $\lim\cos x_n = 1$.

Vì $\dfrac{\pi}{n} \to 0$ (Khi $n \to +\infty$) nên $\lim\cos\dfrac{\pi}{n} = 1$.

Do đó: $\lim v_n = \lim u_n.\ \cos\dfrac{\pi}{n} = \lim u_n \lim\cos\dfrac{\pi}{n} = 0.1 = 0$.

Bài 12. Chứng minh rằng hàm số $y = \cos x$ không có giới hạn khi $x \to +\infty$.

Giải

Xét hai dãy : (u_n) và (v_n) với $u_n = 2\pi n$, $v_n = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$. Rõ hàm

$\lim u_n = +\infty_n$, $\lim v_n = +\infty$.

Xét $\lim\cos u_n = \lim(\cos 2n\pi) = 1$. (1)

$\lim\cos v_n = \lim(\cos(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi)) = \lim\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$. (2)

Từ (1) và (2) chứng tỏ hàm số $y = \cos x$ không có giới hạn khi $x \to +\infty$.

Bài 13: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{6 - 3x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$; b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - \sqrt{3x - 2}}{x^2 - 4}$; c) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$;

d) $\lim\limits_{x \to 1^-}(x + x^2 + ... + x^n - \dfrac{n}{1 - x})$; e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 1}{x + 3}$; f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + \sqrt{4x^2 - 1}}{2 - 3x}$;

g) $\lim\limits_{x \to -\infty}(-2x^3 + x^2 - 3x + 1)$.

Giải

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{6 - 3x}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \dfrac{12}{3} = 4$.

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - \sqrt{3x - 2}}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x - 2)(x + 2)(x + \sqrt{3x - 2})}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 1}{(x + 2)(x + \sqrt{3x - 2})} = \dfrac{1}{16}$.

c) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 2} = -\infty$.

d) Ta có: $x + x^2 + ... + x^n = x.\dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ $(x \neq 1)$

Do đó: $\lim\limits_{x \to 1^-}(x + x^2 + ... + x^n - \dfrac{n}{1 - x}) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x(1 - x^n) - n}{1 - x}$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-x^{n+1} + x - n}{1 - x} = -\infty$.

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 1}{x + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 - \dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{x}{3}} = 2$.

g) $\lim\limits_{x \to -\infty}(-2x^3 + x^2 - 3x + 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3(-2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}) = +\infty$.

Bài14. Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất một nghiệm : $\sin x = x - 1$.

Giải

Đặt $f(x) = \sin x - x + 1$. Hiển nhiên $f(x)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(0) = \sin 0 - 0 + 1 = 1 > 0$ (1)

$f(\dfrac{3\pi}{2}) = \sin\dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{3\pi}{2} + 1 = -\dfrac{3\pi}{2} < 0$ (2)

Từ (1) và (2) . Ta có: $f(0).f(\frac{3\pi}{2}) < 0$. Từ đây suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (0; \frac{3\pi}{2})$. Hay phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm.

Bài 15. Phương trình sau có nghiệm hay không trong khoảng (–1; 3) ?
$x^4 - 3x^3 + x - 1 = 0$.

Giải

Đặt $f(x) = x^4 - 3x^3 + x - 1$. Hiển nhiên f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(0) = -1 < 0$ (1)

$f(-1) = 1 - 3.(1) - 1 - 1 = 2 > 0$ (2)

Từ (1) và (2) . Ta có: $f(0) . f(-1) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (-1;0)$.

Do đó phương trình đã cho có nghiệm $x_0 \in (-1;3)$.

Bài 16. Giải các phương trình:

a) $f'(x) = g(x)$ với $f(x) = \sin^3 2x$ và $g(x) = 4\cos 2x - 5\sin 4x$;

b) $f'(x) = 0$ với $f(x) = 20\cos 3x + 12\cos 5x - 15\cos 4x$.

Giải

a) Ta có: $f'(x) = 3\sin^2 2x.(\sin 2x)' = 3\sin^2 2x.2\cos 2x = 6\sin^2 2x\cos 2x$.

Vì vậy: $f'(x) = g(x)$ $\Leftrightarrow 6\sin^2 2x\cos 2x = 4\cos 2x - 5\sin 4x$

$$\Leftrightarrow 6\sin^2 2x\cos 2x - 4\cos 2x + 10\sin 2x\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(3\sin^2 2x + 5\sin 2x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ 3\sin^2 2x + 5\sin 2x - 4 = 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ \sin 2x = \frac{\sqrt{73} - 5}{6}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\\ x = \alpha + k\pi\\ x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k\pi\end{array}\right.$$

$$(k \in \mathbb{Z}, \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{73} - 5}{6}).$$

b) $f'(x) = -20.3\sin 3x - 12.5\sin 5x + 15.4.\sin 4x$

$= 60(\sin 4x - \sin 3x - \sin 5x)$

Vì vậy: $f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 4x - (\sin 3x + \sin 5x) = 0 \Leftrightarrow \sin 4x - 2\sin\frac{8x}{2}\cos\frac{2x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x - (1 - 2\cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 4x = 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 12\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{4} \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 12\pi \end{array}\right.$$

Bài 17. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{\cos^2 3x}$; b) $y = \dfrac{\cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$;

c) $y = (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x$; d) $y = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$.

Giải

a) $y' = -\dfrac{1}{\cos^4 3x}(\cos^2 3x)' = -\dfrac{1}{\cos^4 3x}.2\cos 3x.(-3\sin 3x) = \dfrac{6\sin 3x}{\cos^3 3x}$.

b) $$y' = \frac{(-\sin\sqrt{x^2+1}).(\sqrt{x^2+1})'.\sqrt{x^2+1} - (\sqrt{x^2+1})'.\cos\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}$$

$$= \frac{(-x\sin\sqrt{x^2+1}) - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}.\cos\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}$$

$$= -\frac{x(\sqrt{x^2+1}\sin\sqrt{x^2+1} + \cos\sqrt{x^2+1})}{(x^2+1)(\sqrt{x^2+1})}.$$

c) $y' = -2x.\cos x + (2 - x^2)(-\sin x) + 2\sin x + 2x\cos x = x^2\sin x$.

d) $$y' = \frac{(\cos x - \cos x + x\sin x)(\cos x + x\sin x)}{(\cos x + x\sin x)^2}$$

$$-\frac{(\sin x - x\cos x)(-\sin x + \sin x + x\cos x)}{(\cos x + x\sin x)^2}$$

$$= \frac{x\sin\cos x + x^2\sin^2 x - x\sin x\cos x + x^2\cos^2 x}{(\cos x + x\sin x)^2} = \frac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}$$

Bài 18. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{x+1}$; b) $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$; c) $y = \sin ax$ (a là hằng số) ;

d) $y = \sin^2 x$.

Giải

a) Ta có: $y' = -\frac{1}{(x+1)^2}$. Từ đây ta có được

$$y'' = \frac{1}{(x+1)^4}2(x+1) = \frac{2}{(x+1)^3}$$

b) $y = \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}$. Do đó:

$$y'' = \frac{1}{x^4}.2x - \frac{1}{(1-x)^4}.2(1-x).(-1) = \frac{2}{x^3} + \frac{2}{(1-x)^3}.$$

c) $y' = a\cos ax$, do đó $y'' = a^2(-\sin ax) = -a^2\sin ax$.

d) $y' = 2\sin x \,.\, \cos x = \sin 2x \Rightarrow y'' = 2\cos 2x$.

Bài 19. Cho hàm số : $f(x) = x^3+bx^2+cx+d$. (C)

Hãy xác định các số b, c, d biết rằng đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ đi qua các điểm $(-1; -3)$; $(1; -1)$ và $f'(\frac{1}{3}) = 0$.

Giải

Ta có $f'(x) = 3x^2+2bx+c$. Vì $f'(\frac{1}{3}) = 0$ nên ta có:

$$\frac{1}{3} + \frac{2b}{3} + c = 0 \Leftrightarrow 2b + 3c + 1 = 0 \quad . (1)$$

Mặt khác, các điểm $(-1; -3)$; $(1; -1)$ thuộc (C) nên:

$$\begin{cases} -3 = -1 + b - c + d \\ -1 = 1 + b + c + d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - c + d = -2 & (2) \\ b + c + d = -2 & (3) \end{cases}$$

Từ (2) và (3),ta có $c = 0$, thay vào (1) có $b = -\frac{1}{2}$, thay $b = -\frac{1}{2}$, $c = 0$ vào (2), ta có: $d = -\frac{3}{2}$.

Vậy : $b = -\frac{1}{2}; c = 0; d = -\frac{3}{2}$.

Bài 20 . Cho các hàm số

$$f(x)= x^3 - bx^2+cx+d, \text{ (C)}$$

$$g(x) = x^2 -3x +1$$

với các số b, c, d tìm được ở bài 19, hãy:

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x=-1$.

b) Giải phương trình $f'(\sin x) = 0$.

c) Tìm $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f''(\sin 5x) + 1}{g'(\sin 3x) + 3}$

Giải

a) Điểm có hoành độ $x = -1$ thuộc đồ thị (C) là điểm $M(-1; -3)$. Mặt khác

$f'(x) = 3x^2 - x$, nên : $f'(-1) = 3 + 1 = 4$. Vậy phương trình tiếp tuyến với (C) tại M là $y + 3 = 4(x+1) \Leftrightarrow y = 4x + 1$.

b) Ta có $f'(\sin x) = 0 \Leftrightarrow 3\sin^2 x - \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right.$$

(α thỏa mãn: $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ và $k \in \mathbb{Z}$).

c) Ta có $f''(x) = 6x - 1$, do đó $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f''(\sin 5x) + 1}{g'(\sin 3x) + 3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6\sin 5x}{2\sin 3x - 3 + 3}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3\sin 5x}{\sin 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{3\sin 5x}{5x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{5}{3} = 5.$$

MỤC LỤC

Lời nói đầu 3

Chương I. Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác 5
- § 1. Các hàm số lượng giác 5
- § 2. Phương trình lượng giác cơ bản 12
- § 3. Một số phương trình lượng giác thường gặp 17
- Ôn tập chương I 24

Chương II. Tổ hợp – xác suất 30
- § 1. Quy tắc đếm 30
- § 2. Hoán vị – chỉnh hợp – tổ hợp 32
- § 3. Nhị thức Niu–tơn 36
- § 4. Phép thử và biến cố 40
- § 5. Xác suất của biến cố 45
- Ôn tập chương II 51

Chương III. Dãy số – cấp số cộng và cấp số nhân 58
- § 1. Phương pháp quy nạp toán học 58
- § 2. Dãy số 63
- § 3. Cấp số cộng 67
- § 4. Cấp số nhân 71
- Ôn tập chương III 75

Chương IV. Giới hạn 84
- § 1. Giới hạn của dãy số 84
- § 2. Giới hạn của hàm số 90
- § 3. Hàm số liên tục 95
- Ôn tập chương IV 100

Chương V. Đạo hàm 107
- § 1. Đạo hàm và ý nghĩa của đạo hàm 107
- § 2. Quy tắc tính đạo hàm 114
- § 3. Đạo hàm của các hàm số lượng giác 118
- § 4. Vi phân 125
- § 5. Đạo hàm cấp hai 128
- Ôn tập chương V 130
- Ôn tập cuối năm 138